P3 de Equações diferenciais e de diferenças
MAT 1154 — 2008.1
Data: 19 de junho de 2008

Nome: GABARITO ______________________ Matrícula: ____________
Assinatura: ______________________ Turma: ____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	2.0		
1b	1.0		
2a	1.0		
2b	1.0		
2c	1.0		
3a	1.0		
3b	1.0		
4a	1.0		
4b	1.0		
Total	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou caneta preta.
  Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Seja y a solução do problema de valor inicial abaixo:

$$y''(t) + 9y(t) = \delta_\pi(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

   (a) Calcule $y(t)$.

   (b) Esboce o gráfico de $y(t)$.

   Solução:

   (a) Aplicando Laplace aos dois lados da equação temos

$$s^2 Y(s) - 1 + 9Y(s) = e^{-\pi s}$$

   donde

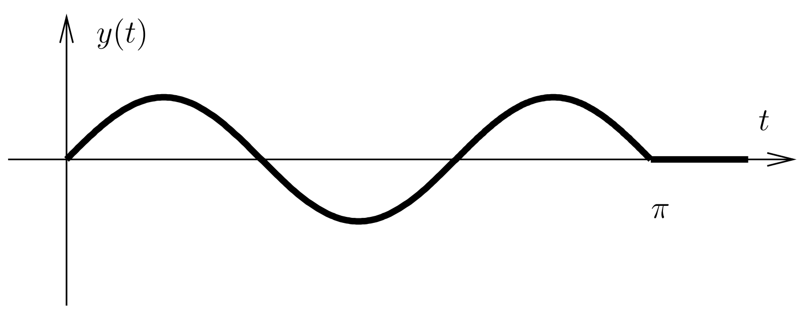
$$Y(s) = \frac{1}{3}\,\frac{3}{s^2+3^2} + \frac{e^{-\pi s}}{3}\,\frac{3}{s^2+3^2}$$

   donde

$$y(t) = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3t) + \frac{1}{3}u_\pi(t)\operatorname{sen}(3(t-\pi))$$

   (b) Temos

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3t), & 0 \le t \le \pi, \\ 0, & t \ge \pi. \end{cases}$$



2. Considere o problema de valor inicial abaixo:

$$y''(t) + 2ty'(t) + y(t) = \frac{1}{1-t^2}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Considere ainda a expansão em série de potências da solução:

$$y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots + a_n t^n + \cdots .$$

(a) Encontre uma equação de diferenças relacionando os coeficientes a_n.

(b) Encontre a_n para $n \leq 6$.

(c) Calcule

$$\lim_{t \to 0} \frac{y''(t) - t^2}{y(t) - 1}.$$

Solução:

(a)

(Primeira solução) Pelo enunciado, $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$. Expandindo temos

$$\begin{aligned}
y'' &= 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + \cdots + (n+1)(n+2)a_{n+2}t^n + \cdots \\
2ty' &= 2a_1 t + 4a_2 t^2 + 6a_3 t^3 + \cdots + 2na_n t^n + \cdots \\
y &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots \\
1/(1-t^2) &= 1 + 0t + t^2 + \cdots + c_n t^n + \cdots
\end{aligned}$$

donde, para $n \geq 0$,

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + (2n+1)a_n = c_n = \begin{cases} 1, & n \text{ par}, \\ 0, & n \text{ ímpar}. \end{cases}$$

(Segunda solução) Reescreva a EDO como

$$(1-t^2)y''(t) + (2t - 2t^3)y'(t) + (1-t^2)y(t) = 1.$$

Temos

$$\begin{aligned}
t^2 y'' &= \cdots + (n-1)na_n t^n + \cdots \\
2t^3 y' &= \cdots + 2(n-2)a_{n-2}t^n + \cdots \\
t^2 y &= \cdots + a_{n-2}t^n + \cdots
\end{aligned}$$

donde

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} - (n-1)na_n + 2na_n - 2(n-2)a_{n-2} + a_n - a_{n-2} = 0$$

para todo $n \geq 3$.

(b) Aplicando a relação do item (a) temos

$$\begin{aligned}
2a_2 + a_0 = 1 &\quad \rightarrow \quad a_2 = 0\\
6a_3 + 3a_1 = 0 &\quad \rightarrow \quad a_3 = 0\\
12a_4 + 5a_2 = 1 &\quad \rightarrow \quad a_4 = \frac{1}{12}\\
20a_5 + 7a_3 = 0 &\quad \rightarrow \quad a_5 = 0\\
30a_6 + 9a_4 = 1 &\quad \rightarrow \quad a_6 = \frac{1}{120}
\end{aligned}$$

(c) Temos

$$y(t) = 1 + \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{120}t^6 + t^7 h_0(t)$$

onde $h_0(t)$ é uma função suave. Assim

$$y''(t) = t^2 + \frac{1}{4}t^4 + t^5 h_2(t)$$

onde $h_2(t)$ também é uma função suave.

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{y''(t) - t^2}{y(t) - 1} &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{4}t^4 + t^5 h_2(t)}{\frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{120}t^6 + t^7 h_0(t)}\\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{4} + t h_2(t)}{\frac{1}{12} + \frac{1}{120}t^2 + t^3 h_0(t)}\\
&= 3.
\end{aligned}$$

3. Em cada um dos itens abaixo é dada uma função F. Encontre f, a transformada de Laplace inversa de F.

(a)

$$F(s) = \frac{1}{s^3 - 8}$$

Solução:

Decompondo em frações parciais temos

$$F(s) = \frac{1}{12}\,\frac{1}{s-2} - \frac{1}{12}\,\frac{s+1}{(s+1)^2+3} - \frac{\sqrt{3}}{12}\,\frac{\sqrt{3}}{(s+1)^2+3}$$

donde

$$f(t) = \frac{1}{12}e^{2t} - \frac{1}{12}e^{-t}\cos(\sqrt{3}\,t) - \frac{\sqrt{3}}{12}e^{-t}\operatorname{sen}(\sqrt{3}\,t).$$

(b)

$$F(s) = \frac{e^{-2s} - e^{-4s}}{2s}$$

Solução:

Pela tabela,

$$f(t) = \frac{1}{2}u_2(t) - \frac{1}{2}u_4(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 2, \\ 1/2, & 2 \le t < 4, \\ 0, & t \ge 4. \end{cases}$$

4. Em cada um dos itens abaixo é dada uma função f. Calcule a transformada de Laplace F de cada uma destas funções.

(a)

$$f(t) = \int_0^t \tau^2 (t-\tau)^2 d\tau$$

Solução:

A função f é a convolução $f = g * g$ onde $g(t) = t^2$. Assim

$$F(s) = (G(s))^2 = \frac{4}{s^6}.$$

(b)

$$f(t) = \begin{cases} e^{(1-t)} - 1, & 0 \le t \le 1, \\ 0, & t \ge 1. \end{cases}$$

Solução:

Temos $f(t) = ee^{-t} - 1 - u_1(t)e^{-(t-1)} + u_1(t)$ donde

$$F(s) = \frac{e}{s+1} - \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s+1} + \frac{e^{-s}}{s}.$$