P4 de Equações diferenciais e de diferenças
MAT 1154 — 2008.1
Data: 26 de junho de 2008

Nome: GABARITO ______________________________ Matrícula: ____________
Assinatura: ______________________________ Turma: ____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	2.0		
1b	2.0		
1c	1.5		
2a	1.0		
2b	0.5		
2c	1.0		
3	2.0		
Total	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou caneta preta.
  Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva os problemas de valor inicial abaixo:

   (a)
$$y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = \begin{cases} 6, & 0 \le t \le 2, \\ 0, & t \ge 2, \end{cases}$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Solução:
Aplicando a transformada de Laplace temos

$$s^2 Y(s) - 1 - 5sY(s) + 6Y(s) = \frac{6 - 6e^{-2s})}{s}$$

donde

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s + 6 - 6e^{-2s}}{s(s-2)(s-3)} \\ &= \left(\frac{1}{s} - \frac{4}{s-2} + \frac{3}{s-3}\right) + \left(-\frac{1}{s} + \frac{3}{s-2} - \frac{2}{s-3}\right) e^{-2s} \end{aligned}$$

donde

$$y(t) = 1 - 4e^{2t} + 3e^{3t} + u_2(t)\left(-1 + 3e^{2(t-2)} - 2e^{3(t-2)}\right).$$

(b)
$$y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 2\,e^{3t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4.$$

Primeira solução:

A equação homogênea associada $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ tem raiz dupla $\lambda = 3$ donde a solução da equação homogênea associada é

$$y_h(t) = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t}.$$

Vamos procurar uma solução particular da forma $y_p(t) = C_3 t^2 e^{3t}$. Temos

$$\begin{aligned}
y_p'(t) &= C_3(3t^2 + 2t)e^{3t} \\
y_p''(t) &= C_3(9t^2 + 12t + 2)e^{3t} \\
y_p''(t) - 6y'(t) + 9y(t) &= C_3 2e^{3t}
\end{aligned}$$

e portanto temos uma solução particular para $C_3 = 1$. Assim a solução geral da equação é
$$y(t) = (C_1 + C_2 t + t^2)e^{3t}$$
com $y(0) = C_1$ e $y'(0) = 3C_1 + C_2$. Assim as condições iniciais dão $C_1 = C_2 = 1$ e portanto

$$y(t) = (1 + t + t^2)e^{3t}.$$

Segunda solução:

Aplicando a transformada de Laplace aos dois lados da equação temos

$$s^2 Y(s) - s - 4 - 6sY(s) + 6 + 9Y(s) = \frac{2}{s-3}$$

donde

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{s^2 - 5s + 8}{(s-3)^3} \\
&= \frac{1}{s-3} + \frac{1}{(s-3)^2} + \frac{2}{(s-3)^3}
\end{aligned}$$

donde
$$y(t) = (1 + t + t^2)e^{3t}.$$

(c)

$$y'(t) - Ay(t) = 0, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Solução:

Os autovalores de A são $2 \pm i$ donde $\exp(tA) = \alpha A + \beta I$ onde $(2 \pm i)\alpha + \beta = e^{2t} \cos t \pm i e^{2t} \operatorname{sen} t$. Assim $2\alpha + \beta = e^{2t} \cos t$ e $\alpha = e^{2t} \operatorname{sen} t$ donde

$$\exp(tA) = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}$$

e

$$y(t) = \exp(tA) y(0) = 3e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}.$$

2. Seja (y_n) a seqüência definida por

$$y_{n+2} = n + 1 - y_{n+1} - y_n, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 0.$$

(a) Encontre uma fórmula para y_n.

(b) Calcule y_n para $n \leq 6$.

(c) Calcule y_{2008}; simplifique sua resposta.

Solução:

(a) A equação algébrica associada $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ tem raízes ω e $\overline{\omega}$ onde

$$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right), \quad \overline{\omega} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \exp\left(-\frac{2\pi i}{3}\right)$$

donde a solução da equação homogênea associada é

$$\tilde{y}_n = C_1\omega^n + C_2\overline{\omega}^n.$$

Vamos procurar uma solução particular da forma $y_n = C_3 n + C_4$. Temos

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= C_3 n + C_3 + C_4 \\ y_{n+2} &= C_3 n + 2C_3 + C_4 \\ y_{n+2} + y_{n+1} + y_n &= 3C_3 n + 3C_3 + 3C_4 \end{aligned}$$

o que dá uma solução particular para $C_3 = 1/3$, $C_4 = 0$. Assim a solução geral da equação é

$$y_n = \frac{n}{3} + C_1\omega^n + C_2\overline{\omega}^n.$$

Pelas condições iniciais temos $C_1 + C_2 = 0$, $1/3 + \omega C_1 + \overline{\omega} C_2 = 0$ donde

$$C_1 = \frac{i}{3\sqrt{3}}, \quad C_2 = -\frac{i}{3\sqrt{3}},$$

e finalmente

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{n}{3} + \frac{i(\omega^n - \overline{\omega}^n)}{3\sqrt{3}} \\ &= \frac{n}{3} - \frac{2\operatorname{sen}(2n\pi/3)}{3\sqrt{3}} \\ &= \frac{n}{3} + \begin{cases} 0, & n = 3k, \\ -1/3, & n = 3k+1, \\ 1/3, & n = 3k+2. \end{cases} \qquad \text{(onde } k \text{ é inteiro)} \end{aligned}$$

(b) Quer pela fórmula obtida no item (a) quer pela equação de diferenças no enunciado é fácil obter

$$y_2 = 1, \quad y_3 = 1, \quad y_4 = 1, \quad y_5 = 2, \quad y_6 = 2.$$

O padrão continua assim:

$$0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, \ldots$$

(c) Quer pela fórmula obtida no item (a) quer pelo padrão observado no item (b) temos

$$y_{2008} = 2008/3 - 1/3 = 2007/3 = 669.$$

3. Seja $y(t)$ a função suave definida por

$$(e^t - 1)y(t) = t.$$

Encontre os coeficientes a_k da expansão de $y(t)$ em série de potências

$$y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_k t^k + \cdots$$

para $k = 0, 1, 2, 3$.

Solução: Temos

$$\begin{gathered}(e^t - 1)y(t) = \\ = \left(t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots\right)\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \cdots\right) = \\ = a_0 t + \left(a_1 + \frac{a_0}{2!}\right)t^2 + \left(a_2 + \frac{a_1}{2!} + \frac{a_0}{3!}\right)t^3 + \left(a_3 + \frac{a_2}{2!} + \frac{a_1}{3!} + \frac{a_0}{4!}\right)t^4 + \cdots = \\ = t + 0t^2 + 0t^3 + 0t^4 + \cdots\end{gathered}$$

donde

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 + \frac{a_0}{2!} &= 0 \\ a_2 + \frac{a_1}{2!} + \frac{a_0}{3!} &= 0 \\ a_3 + \frac{a_2}{2!} + \frac{a_1}{3!} + \frac{a_0}{4!} &= 0 \end{aligned}$$

donde

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = -\frac{a_0}{2!} = -\frac{1}{2}$$

$$a_2 = -\frac{a_1}{2!} - \frac{a_0}{3!} = \frac{1}{12}$$

$$a_3 = -\frac{a_2}{2!} - \frac{a_1}{3!} - \frac{a_0}{4!} = 0.$$