P1 de Equações diferenciais e de diferenças
MAT 1154 — 2008.2
Data: 6 de setembro de 2008

Nome: GABARITO ______________________ Matrícula: ____________
Assinatura: ______________________ Turma: ____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	1.0		
1b	1.0		
1c	1.0		
2	1.4		
3a	1.3		
3b	1.3		
Total	7.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou preta. Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva os problemas de valor inicial abaixo, isto é, encontre a função $y(x)$ que satisfaz a equação diferencial e as condições iniciais dadas.

   (a)
$$y' = x\, e^{x-y}, \quad y(0) = 0.$$

Solução:

Reescreva a equação como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xe^x}{e^y}$$

donde

$$\begin{aligned} \int e^y dy &= \int xe^x dx \\ e^y &= (x-1)e^x + C \\ y &= \ln((x-1)e^x + C) \end{aligned}$$

e como $y(0) = 0$ temos $C = 2$, ou seja,

$$y = \ln((x-1)e^x + 2).$$

(b)

$$y' + \frac{2x}{1+x^2}\, y = 1, \quad y(0) = 0.$$

Solução:

Esta é uma equação linear. Vamos resolver primeiro a equação homogênea associada

$$y_h' + \frac{2x}{1+x^2}\, y_h = 0.$$

Temos

$$\begin{aligned}
\frac{dy_h}{dx} &= -\frac{2x}{1+x^2}\, y_h \\
\int \frac{dy_h}{y_h} &= -\int \frac{2x dx}{1+x^2} \\
\ln(y_h) &= -\ln(1+x^2) \\
y_h &= \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

Façamos agora a substituição $y = y_h z$ para obter $y_h z' = 1$ donde $z' = 1 + x^2$, $z = x + x^3/3$ e a solução geral é

$$y = \frac{C + 3x + x^3}{3 + 3x^2}.$$

Como $y(0) = 0$ temos

$$y = \frac{3x + x^3}{3 + 3x^2}.$$

(c)
$$y'' + 6y' + 9y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Solução:

A equação associada $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ tem raiz dupla $\lambda = -3$.

É natural conjecturar que exista uma solução particular constante $y_p = C$. Substituindo na equação verificamos que de fato $y_p = 1/9$ satisfaz a equação donde a solução geral é

$$y(x) = \frac{1}{9} + C_1 e^{-3x} + C_2 x\, e^{-3x}.$$
$$y'(x) = -3C_1 e^{-3x} + C_2(-3x + 1)\, e^{-3x}.$$

Temos $y(0) = 1/9 + C_1 = 0$ e $y'(0) = -3C_1 + C_2 = 1$ donde $C_1 = -1/9$ e $C_2 = 2/3$. Assim

$$y(x) = \frac{1 + (6x - 1)\, e^{-3x}}{9}.$$

2. Resolva a equação de diferenças abaixo:

$$y_{n+1} - 4^n y_n = 2^{(n^2)}, \quad y_0 = 0.$$

Solução:

Considere a equação homogênea associada $\tilde{y}_{n+1} = 4^n \tilde{y}_n$. Temos $\tilde{y}_n = 4^{(n-1)+\cdots+1+0}\tilde{y}_0 = 4^{\frac{n(n-1)}{2}}\tilde{y}_0 = 2^{n^2-n}\tilde{y}_0$ donde uma solução da equação homogênea associada é $\tilde{y}_n = 2^{n^2-n}$.

Façamos a substituição $y_n = 2^{n^2-n}z_n$ donde $y_{n+1} = 2^{n^2+n}z_{n+1}$ e portanto $z_{n+1} - z_n = 2^{-n}$ ou $z_{n+1} = z_n + 2^{-n}$, ou $z_n = 2^{-(n-1)} + \cdots + 2^{-1} + 2^0 + z_0 = (2 - 2^{-(n-1)}) + z_0$ que admite a solução $z_n = -2^{(1-n)}$ que corresponde a $y_n = -2^{n^2-2n+1}$.

Assim a solução geral é $y_n = 2^{(n-1)^2}(C2^{(n-1)} - 1)$. A condição inicial $y_0 = 0$ mostra que $C = 2$ donde

$$y_n = 2^{(n-1)^2}(2^n - 1).$$

3. Sejam

$$y_{p,1}(x) = -2, \quad y_{p,2}(x) = 2, \quad y_{p,3}(x) = \cos(x).$$

(a) Diga se existe uma EDO linear de primeira ordem

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

que admita $y_{p,1}$, $y_{p,2}$ e $y_{p,3}$ como soluções.

(b) Dê um exemplo de uma EDO de primeira ordem

$$y'(x) = F(x, y(x))$$

(não necessariamente linear) que admita $y_{p,1}$, $y_{p,2}$ e $y_{p,3}$ como soluções.

Solução:

(a) **Não.** De fato, substituindo as duas primeiras funções na equação temos $-2a(x) = 2a(x) = b(x)$ donde $a(x) = b(x) = 0$. Entretanto, a terceira função não é solução de $y'(x) = 0$.

(b) Devemos ter

$$F(x, -2) = F(x, 2) = 0, \quad F(x, \cos(x)) = -\operatorname{sen}(x).$$

As duas primeiras equações são satisfeitas se $F(x, y) = (y + 2)(y - 2)G(x, y)$ (onde G deve ser suave). A terceira equação vira

$$F(x, \cos(x)) = (\cos(x) + 2)(\cos(x) - 2)G(x, \cos(x)) = -\operatorname{sen}(x)$$

ou $G(x, \cos(x)) = -\operatorname{sen}(x)/((\cos(x) + 2)(\cos(x) - 2))$. Basta assim tomar $G(x, y) = -\operatorname{sen}(x)/((\cos(x) + 2)(\cos(x) - 2))$ ou

$$y' = F(x, y) = -\frac{(y + 2)(y - 2)\operatorname{sen}(x)}{(\cos(x) + 2)(\cos(x) - 2)}.$$