P3 de Equações diferenciais e de diferenças
MAT 1154 — 2008.2
Data: 18 de novembro de 2008

Nome: GABARITO ______________________ Matrícula: __________
Assinatura: ______________________ Turma: __________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	1.0		
1b	1.0		
2a	1.0		
2b	1.0		
2c	1.0		
3a	0.5		
3b	0.5		
4a	0.5		
4b	0.5		
Prova	7.0		
Teste	3.0		
Nota final	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou caneta preta.
  Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Seja y_C a solução do problema de valor inicial abaixo:

$$y_C''(t) + 2y_C'(t) + y_C(t) = C\delta(t-1), \quad y_C(0) = 0, \quad y_C'(0) = 1.$$

(a) Calcule $y_C(t)$ (em função de C e t).

(b) Para quais valores de C temos $y_C(t) > 0$ para todo $t > 0$?

Solução:

(a) Aplicando a transformada de Laplace aos dois lados temos

$$\begin{aligned} s^2 Y_C(s) - 1 + 2sY_C(s) + Y_C(s) &= Ce^{-s} \\ Y_C(s) &= \frac{1}{(s+1)^2} + C\frac{e^{-s}}{(s+1)^2} \\ y_C(t) &= te^{-t} + Cu_1(t)(t-1)e^{-(t-1)} \end{aligned}$$

(b) Podemos reescrever

$$y_C(t) = \begin{cases} te^{-t}, & 0 \le t \le 1 \\ ((1+Ce)t - Ce)e^{-t}, & 1 \le t \end{cases}$$

donde $y(t) > 0$ para $0 < t \le 1$ e, para $t \ge 1$, $y(t)$ tem o sinal de $w = (1+Ce)t - Ce$. Note que para $t = 1$ temos $w = 1$. Se o coeficiente angular $1 + Ce$ for positivo ou nulo teremos $w > 0$ para todo $t > 0$. Por outro lado, se $1 + Ce$ for negativo teremos $w < 0$ para todo t suficientemente grande.

Assim, temos $y_C(t) > 0$ para todo $t > 0$ se e somente se $C \ge -e^{-1}$.

2. Considere o problema de valor inicial abaixo:

$$y''(t) + 4\,t^3\,y'(t) + 12\,t^2\,y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Considere ainda a expansão em série de potências da solução:

$$y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots + a_n t^n + \cdots .$$

(a) Encontre uma equação de diferenças relacionando os coeficientes a_n.

(b) Encontre a_n para $n \leq 12$.

(c) Calcule

$$\lim_{t \to +\infty} y(t).$$

Solução:

(a) Pelo enunciado, $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$. Expandindo temos

$$\begin{aligned}
y'' &= 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + \cdots + (n+1)(n+2)a_{n+2}t^n + \cdots \\
4\,t^3\,y' &= 4a_1 t^3 + 8a_2 t^4 + 12a_3 t^5 + \cdots + 4(n-2)a_{n-2}t^n + \cdots \\
12\,t^2\,y &= 12a_0 t^2 + 12a_1 t^3 + 12a_2 t^4 + \cdots + 12a_{n-2}t^n + \cdots
\end{aligned}$$

donde $a_2 = a_3 = 0$ e, para $n \geq 2$,

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + 4(n+1)a_{n-2} = 0$$

ou

$$a_{n+2} = -\frac{4}{n+2}a_{n-2}.$$

(b) Temos $a_4 = -1$, $a_5 = a_6 = a_7 = 0$, $a_8 = 1/2$, $a_9 = a_{10} = a_{11} = 0$, $a_{12} = -1/6$.

(c) Temos

$$y(t) = 1 - t^4 + \frac{t^8}{2!} - \frac{t^{12}}{3!} + \cdots = e^{-t^4}$$

donde

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0.$$

3. Em cada um dos itens abaixo é dada uma função F. Encontre f, a transformada de Laplace inversa de F.

(a)

$$F(s) = \frac{4\,s^3 - 20\,s}{s^4 - 10\,s^2 + 9}$$

Solução:

Temos

$$F(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-3} + \frac{1}{s+3}$$

donde

$$f(t) = e^t + e^{-t} + e^{3t} + e^{-3t}.$$

(b)

$$F(s) = \frac{s}{(s-2)^8}$$

Solução:

Temos

$$F(s) = \frac{s-2}{(s-2)^8} + \frac{2}{(s-2)^8} = \frac{1}{6!}\,\frac{6!}{(s-2)^7} + \frac{2}{7!}\,\frac{7!}{(s-2)^8}$$

donde

$$f(t) = \frac{1}{6!}\,t^6\,e^{2t} + \frac{2}{7!}\,t^7\,e^{2t}.$$

4. Em cada um dos itens abaixo é dada uma função f. Calcule a transformada de Laplace F de cada uma destas funções.

(a)

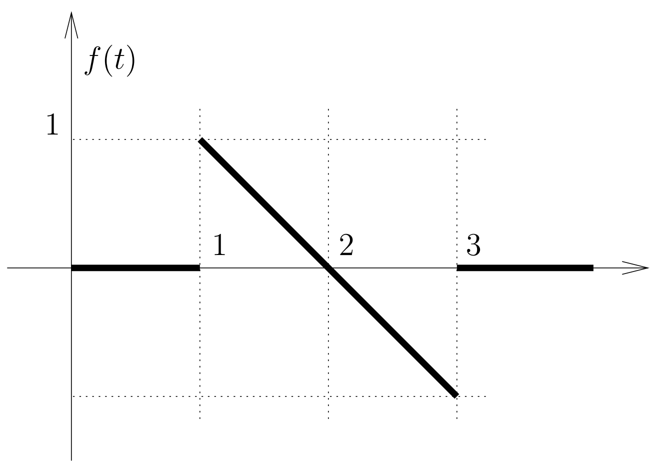
$$f(t) = \int_0^t \tau^2 \, e^{-\tau} \, d\tau$$

Solução:

Seja $g(t) = t^2 \, e^{-t}$. Temos $f'(t) = g(t)$ donde $G(s) = sF(s) - f(0)$. Mas $f(0) = 0$ e $G(s) = 2/(s+1)^3$. Assim

$$F(s) = \frac{2}{s(s+1)^3}.$$

(b) A função f tem o gráfico abaixo:



Solução:

Temos $f(t) = u_1(t)(1 - (t-1)) + u_3(t)(1 + (t-3))$ donde

$$F(s) = \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-3s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s^2}.$$