# P4 de Equações diferenciais e de diferenças
# MAT 1154 — 2008.2
# Data: 1 de dezembro de 2008

Nome: GABARITO ____________________ Matrícula: __________
Assinatura: ____________________ Turma: __________

| Questão | Valor | Nota | Revisão |
|---|---|---|---|
| 1a | 2.0 | | |
| 1b | 2.0 | | |
| 1c | 2.0 | | |
| 2 | 2.0 | | |
| 3a | 1.0 | | |
| 3b | 1.0 | | |
| Total | 10.0 | | |

## Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou caneta preta.
  Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva os problemas de valor inicial abaixo:

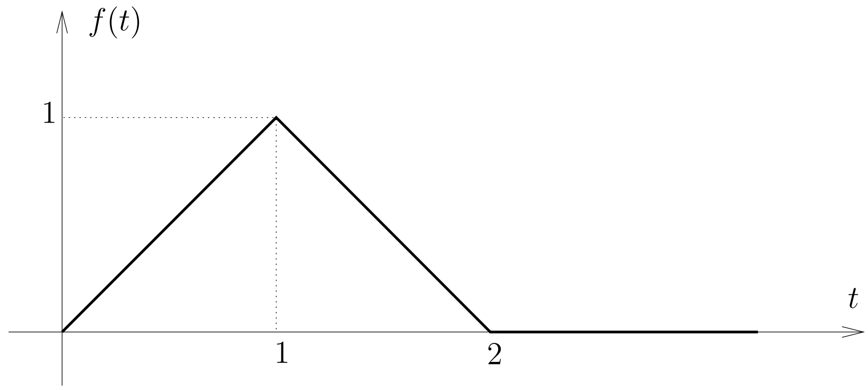
   (a)
$$y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 2e^{3t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

   **Solução:**
   A equação algébrica associada $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ tem raiz dupla $\lambda = 3$. Assim a solução da equação homogênea associada é
$$y_h = C_1 e^{3t} + C_2 t\, e^{3t}.$$
   Note que o lado direito da equação envolve precisamente esta raiz. Assim é natural conjecturar que exista solução da forma $y_p = C_3 t^2\, e^{3t}$. Substituindo na equação verificamos que isto de fato ocorre para $C_3 = 1$ e portanto a solução geral é
$$y = C_1 e^{3t} + C_2 t\, e^{3t} + t^2\, e^{3t}.$$
   Temos $y(0) = C_1 = 1$ e $y'(0) = 3C_1 + C_2 = 1$ donde $C_2 = -2$ e
$$y = (1-t)^2\, e^{3t}.$$

(b)

$$y''(t) + 7y'(t) + 10y(t) = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

onde $f(t)$ tem o gráfico abaixo.




**Solução:**

Temos $f(t) = tu_0(t) - 2(t-1)u_1(t) + (t-2)u_2(t)$ donde, aplicando Laplace,

$$s^2Y + 7sY + 10Y = (1 - 2e^{-s} + e^{-2s})\frac{1}{s^2}$$

donde

$$\begin{aligned} Y &= (1 - 2e^{-s} + e^{-2s})\frac{1}{s^2(s+2)(s+5)} \\ &= (1 - 2e^{-s} + e^{-2s})\left(-\frac{7}{100}\,\frac{1}{s} + \frac{1}{10}\,\frac{1}{s^2} + \frac{1}{12}\,\frac{1}{s+2} - \frac{1}{75}\,\frac{1}{s+5}\right) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} y = &-\frac{7}{100} + \frac{t}{10} + \frac{e^{-2t}}{12} - \frac{e^{-5t}}{75} \\ &- 2u_1(t)\left(-\frac{7}{100} + \frac{t-1}{10} + \frac{e^{-2(t-1)}}{12} - \frac{e^{-5(t-1)}}{75}\right) \\ &+ u_2(t)\left(-\frac{7}{100} + \frac{t-2}{10} + \frac{e^{-2(t-2)}}{12} - \frac{e^{-5(t-2)}}{75}\right). \end{aligned}$$

(c)
$$y'(t) - Ay(t) = b(t),$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 1 - 6t \\ t \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Solução:**

A matriz $A$ tem autovalores $6 \pm 2i$ e

$$\exp(tA) = e^{6t} \begin{pmatrix} \cos(2t) & 2\operatorname{sen}(2t) \\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

O lado direito tem entradas que são polinômios de grau 1 logo é natural conjecturar que exista uma solução da forma

$$y_p = \begin{pmatrix} C_1 t + C_2 \\ C_3 t + C_4 \end{pmatrix};$$

substituindo vemos que isto de fato ocorre para $C_1 = 1$, $C_2 = C_3 = C_4 = 0$. Assim

$$y(t) = \begin{pmatrix} t + 2\,e^{6t}\,\operatorname{sen}(2t) \\ e^{6t}\,\cos(2t) \end{pmatrix}.$$

2. As seqüências $(a_n)$ e $(b_n)$ satisfazem

$$a_{n+1} = a_n + b_n + 1, \quad b_{n+1} = a_{n+1} + 3a_n - 9, \quad a_0 = 6, \quad b_0 = 3.$$

Calcule $a_n$ e $b_n$.

**Solução:**

Reescreva a segunda equação como $b_{n+1} = 4a_n + b_n - 8$. Assim

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de $A$ são $-1$ e $3$ e

$$A^n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \cdot 3^n + 2 \cdot (-1)^n & 3^n - (-1)^n \\ 4 \cdot 3^n - 4 \cdot (-1)^n & 2 \cdot 3^n + 2 \cdot (-1)^n \end{pmatrix}.$$

É natural conjectura que o sistema admita solução constante: isto de fato ocorre para a solução particular $\hat{a}_n = 2$, $\hat{b}_n = -1$. Assim a solução geral é

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + A^n \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Pelas condições iniciais temos $C_1 = C_2 = 4$ donde

$$a_n = 2 + 3 \cdot 3^n + (-1)^n, \quad b_n = -1 + 6 \cdot 3^n - 2 \cdot (-1)^n.$$

3. Determine o coeficiente $a_n$ da expansão em série de potências

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n + \cdots$$

para cada uma das funções abaixo:

(a)

$$f(t) = \frac{1}{t^2 - 5t + 6}.$$

**Solução:**

Temos

$$f(t) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-(t/2)} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-(t/3)}.$$

Sabemos que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

donde

$$f(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{t}{2^2} + \frac{t^2}{2^3} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{t}{3^2} + \frac{t^2}{3^3} + \cdots\right)$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}.$$

(b)

$$f(t) = \int_0^t \frac{1-\cos\tau}{\tau^2} d\tau.$$

**Solução:**

Sabemos que

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots$$

donde

$$\frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2!} - \frac{t^2}{4!} + \frac{t^4}{6!} - \frac{t^6}{8!} + \cdots$$

donde

$$f(t) = \frac{t}{2!} - \frac{t^3}{3\cdot 4!} + \frac{t^5}{5\cdot 6!} - \frac{t^7}{7\cdot 8!} + \cdot$$

donde

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par}, \\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\cdot(n+1)!}, & n \text{ ímpar}. \end{cases}$$