

# P2 de Equações diferenciais e de diferenças

MAT 1154 — 2009.1

Data: 23 de maio de 2009

Nome: \_\_\_\_\_ Matrícula: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	1.5		
1b	1.5		
2a	1.0		
2b	1.0		
3a	1.0		
3b	1.0		
Prova	7.0		
Teste	3.0		
Nota final	10.0		

## Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou preta. Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva os problemas de valor inicial abaixo:

(a)

$$\mathbf{y}' - A\mathbf{y} = b(t), \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$y_1' = 5y_1 - y_2, \quad y_2' = y_1 + 3y_2, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0.$$

2. Considere o sistema de equações de diferenças abaixo:

$$a_{n+1} = a_n - b_n + 1, \quad b_{n+1} = a_n - n, \quad a_0 = 0, \quad b_0 = 1.$$

(a) Resolva o sistema.

(b) Calcule  $a_{2009}$  (simplifique sua resposta ao máximo).

3. A função  $\mathbf{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  satisfaz  $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$  para todo  $t$ , onde  $A$  é uma matriz real  $2 \times 2$ . Sabemos que

$$\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(2) = \begin{pmatrix} 20 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Encontre  $\exp(A)$ .

(b) Calcule

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y_1(t)}{y_2(t)}, \quad \text{onde } \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}.$$