P2 de Equações diferenciais e de diferenças
MAT 1154 — 2009.1
Data: 23 de maio de 2009

Nome:____ Matrícula:____________
Assinatura:____________________________________ Turma:____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	1.5		
1b	1.5		
2a	1.0		
2b	1.0		
3a	1.0		
3b	1.0		
Prova	7.0		
Teste	3.0		
Nota final	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou preta. Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva os problemas de valor inicial abaixo:

   (a)
$$\mathbf{y}' - A\mathbf{y} = b(t), \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Solução:
   A matriz A tem autovalores $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 7$ com autovetores associados $(1, -1)$ e $(1, 1)$, respectivamente. É natural conjecturar que exista uma solução particular constante e podemos verificar facilmente que $(-1/7, -1/7)$ é solução. Assim a solução geral é

$$\mathbf{y}(t) = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{7t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/7 \\ -1/7 \end{pmatrix}.$$

   Substutuindo as condições iniciais temos

$$\mathbf{y}(t) = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} e^{7t} - 1 \\ e^{7t} - 1 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$y_1' = 5y_1 - y_2, \quad y_2' = y_1 + 3y_2, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0.$$

Primeira solução:
Tome

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Temos $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2$ donde $\lambda = 4$ é autovalor de multiplicidade algébrica 2. Temos $\exp(tA) = \alpha A + \beta I$ onde

$$4\alpha + \beta = e^{4t}, \quad \alpha = t\, e^{4t}$$

donde $\beta = (1 - 4t)\, e^{4t}$ e portanto

$$\exp(tA) = e^{4t} \begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix}.$$

Como $\mathbf{y}(t) = \exp(tA)\mathbf{y}(0)$ temos

$$y_1(t) = (1+t)\; e^{4t}, \quad y_2(t) = t\; e^{4t}.$$

Segunda solução:
Temos $A = S + N$, $SN = NS$, $N^2 = 0$ onde

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

donde

$$\exp(tA) = \exp(tS)\exp(tN) = e^{4t} \begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix}.$$

Como na primeira solução,

$$y_1(t) = (1+t)\; e^{4t}, \quad y_2(t) = t\; e^{4t}.$$

2. Considere o sistema de equações de diferenças abaixo:

$$a_{n+1} = a_n - b_n + 1, \quad b_{n+1} = a_n - n, \quad a_0 = 0, \quad b_0 = 1.$$

(a) Resolva o sistema.

(b) Calcule a_{2009} (simplifique sua resposta ao máximo).

Primeira solução:

Calculando os primeiros termos da sequência temos

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
a_n	0	0	1	3	5	6	6	6	7	9	11	12	12	12	13
b_n	1	0	-1	-1	0	1	1	0	-1	-1	0	1	1	0	-1

donde

$$a_n = \begin{cases} n, & n = 6k, \\ n-1, & n = 6k+1, \\ n-1, & n = 6k+2, \\ n, & n = 6k+3, \\ n+1, & n = 6k+4, \\ n+1, & n = 6k+5; \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} 1, & n = 6k, \\ 0, & n = 6k+1, \\ -1, & n = 6k+2, \\ -1, & n = 6k+3, \\ 0, & n = 6k+4, \\ 1, & n = 6k+5. \end{cases}$$

Como $2009 = 6 \cdot 334 + 5$ temos $a_{2009} = 2010$.

Segunda solução:

Escreva

$$\mathbf{y}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_{n+1} - A\mathbf{y}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ -n \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de A são $\lambda_1 = \zeta = (1+\sqrt{-3})/2 = \exp(\pi i/3)$ e $\lambda_2 = \zeta^{-1} = \overline{\zeta}$. O sistema

$$\zeta\alpha + \beta = \zeta^n, \quad \zeta^{-1}\alpha + \beta = \zeta^{-n}$$

tem solução

$$\alpha = \frac{\zeta^n - \zeta^{-n}}{\zeta - \zeta^{-1}}, \quad \beta = \frac{-\zeta^{n-1} + \zeta^{-n+1}}{\zeta - \zeta^{-1}}$$

donde

$$A^n = \frac{1}{\zeta - \zeta^{-1}} \begin{pmatrix} \zeta^n - \zeta^{n-1} + \zeta^{-n+1} - \zeta^{-n} & -\zeta^n + \zeta^{-n} \\ \zeta^n - \zeta^{-n} & -\zeta^{n-1} + \zeta^{-n+1} \end{pmatrix}.$$

É natural conjecturar que exista uma solução particular onde cada coordenada seja um polinômio de grau no máximo 1; de fato, $a_n = n$, $b_n = 0$ é solução. Assim,

$$a_n = n - \frac{\zeta^n - \zeta^{-n}}{\zeta - \zeta^{-1}}, \quad b_n = \frac{-\zeta^{n-1} + \zeta^{-n+1}}{\zeta - \zeta^{-1}},$$

completando o item (a). Para o item (b) temos

$$a_{2009} = 2009 - \frac{\zeta^{2009} - \zeta^{-2009}}{\zeta - \zeta^{-1}};$$

como $\zeta^{2009} = \zeta^{-1}$ temos $a_{2009} = 2010$.

3. A função $\mathbf{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ satisfaz $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ para todo t, onde A é uma matriz real 2×2. Sabemos que

$$\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(2) = \begin{pmatrix} 20 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Encontre $\exp(A)$.

(b) Calcule

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{y_1(t)}{y_2(t)}, \qquad \text{onde } \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}.$$

Solução:

Temos $\mathbf{y}(1) = \exp(A)\mathbf{y}(0)$, $\mathbf{y}(2) = \exp(2A)\mathbf{y}(0) = \exp(A)\mathbf{y}(1)$ donde

$$\begin{pmatrix} 4 & 20 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \exp(A) \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \exp(A) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

completando o item (a). Os autovalores e autovetores de $\exp(A)$ são

$$\lambda_1 = 6, \quad \lambda_2 = 2, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

note que os autovetores de A também são v_1 e v_2 com autovalores $\mu_1 = \ln(6)$, $\mu_2 = \ln(2)$. A solução tem a forma

$$\mathbf{y}(t) = C_1 e^{\mu_1 t} v_1 + C_2 e^{\mu_2 t} v_2;$$

note que $C_1 > 0$. No limite, a solução se alinha com v_1, o autovetor correspondente ao maior autovalor. Assim o limite pedido no item (b) é igual a 2.