P4 de Equações diferenciais e de diferenças
MAT 1154 — 2007.1
Data: 9 de julho de 2009

Nome: GABARITO ____________________ Matrícula:__________
Assinatura:____________________ Turma:__________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	1.3		
1b	1.3		
1c	1.3		
2	1.3		
3	1.3		
Prova	6.5		
Teste	3.5		
Nota final	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou caneta preta.
  Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva os problemas de valor inicial abaixo:

   (a)
$$y'(t) - (\tan t)\, y(t) = \operatorname{sen} t, \quad y(0) = 1.$$

   Solução:
   Esta é uma EDO linear de primeira ordem. A EDO homogênea associada $y_h'(t) - (\tan t)\, y_h(t) = 0$ é separável:

$$\begin{aligned} \int \frac{dy_h}{y_h} &= \int \tan(t) dt \\ \ln(y_h) &= \ln(\sec(t)) \\ y_h(t) &= \sec(t) \end{aligned}$$

   A substituição $y(t) = z(t)y_h(t)$ resolve a EDO:

$$z'(t)y_h(t) + z(t)\left(y_h'(t) - (\tan t)\, y_h(t)\right) = z'(t)y_h(t) = z'(t)\sec(t) = \operatorname{sen}(t)$$
$$z(t) = \int^t \operatorname{sen}(s)\cos(s) ds = -\frac{1}{2}\cos^2(t)$$

   Assim a solução geral é $y(t) = C\sec(t) - (1/2)\cos(t)$. A condição inicial dá
$$y(t) = \frac{3\sec(t) - \cos(t)}{2}.$$

(b)

$$y''(t) + 2y'(t) + 10y(t) = 13\, e^{-3t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Solução:

A equação algébrica associada $\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$ tem raízes complexas $-1 \pm 3i$. Assim a solução da EDO homogênea associada é

$$y_h(t) = C_1\, e^{-t}\, \cos(3t) + C_2\, e^{-t}\, \operatorname{sen}(3t).$$

É natural conjecturar que exista uma solução da forma $y(t) = C\, e^{-3t}$; substituindo verificamos que tal se verifica para $C = 1$. Assim a solução geral é

$$y(t) = C_1\, e^{-t}\, \cos(3t) + C_2\, e^{-t}\, \operatorname{sen}(3t) + e^{-3t};$$

as condições iniciais dão $C_1 = -1$, $C_2 = 2/3$:

$$y(t) = -e^{-t}\, \cos(3t) + \frac{2}{3}\, e^{-t}\, \operatorname{sen}(3t) + e^{-3t}.$$

(c)
$$y'(t) - Ay(t) = 0, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Solução:
A matriz A tem autovalor duplo $\lambda = 2$. Escreva
$$A = S + N, \quad S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix};$$

Como $SN = NS$ temos
$$\exp(tA) = \exp(tS)\exp(tN) = e^{2t}(I + tN) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix}$$

donde
$$y(t) = \exp(tA)y(0) = \begin{pmatrix} (1+4t)\,e^{2t} \\ (3-4t)\,e^{2t} \end{pmatrix}.$$

2. A equação de diferenças linear

$$y(n+1) + a(n)y(n) = b(n)$$

admite as duas seguintes soluções:

$$y_{p,1}(n) = 1 + 2^n, \quad y_{p,2}(n) = -\cos(n\pi/8).$$

A sequência $y_{p,3}(n)$ é uma terceira solução da equação de diferenças. Sabendo que $y_{p,3}(0) = 0$, determine $y_{p,3}(4)$.

Solução:

Como a equação é linear, $y_{p,2} - y_{p,1}$ é solução da equação homogênea associada e portanto a solução geral é

$$y(n) = y_{p,1}(n) + C(y_{p,2}(n) - y_{p,1}(n)) = (1 - C)y_{p,1}(n) + Cy_{p,2}(n).$$

A condição inicial nos dá que para $y_{p,3}$ temos $C = 2/3$ donde

$$y_{p,3}(n) = \frac{1}{3}(1 + 2^n) - \frac{2}{3}\cos(n\pi/8).$$

Assim

$$y_{p,3}(4) = \frac{1}{3}(1 + 2^4) - \frac{2}{3}\cos(4\pi/8) = \frac{17}{3}.$$

3. A função y é definida pelo problema de valor inicial

$$y''(t) + t^2\, y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Calcule

$$\lim_{t\to 0} \frac{y(t) - 1}{t^4}.$$

(Sugestão: considere a expansão de $y(t)$ em série de potências.)

Solução:

Tome

$$y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots$$

donde $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ e

$$\begin{aligned} y''(t) &= 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3 + \cdots \\ t^2\, y(t) &= a_0 t^2 + a_1 t^3 + \cdots \\ y''(t) + t^2\, y(t) &= 2a_2 + 6a_3 t + (12a_4 + a_0)t^2 + (20a_5 + a_1)t^3 + \cdots = 0 \end{aligned}$$

donde $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = -1/12$, $a_5 = 0$ e $y(t) = 1 - 1/12\, t^4 + \cdots$ e

$$\lim_{t\to 0} \frac{y(t) - 1}{t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{(1 - 1/12\, t^4 + \cdots) - 1}{t^4} = -\frac{1}{12}.$$