Teste 4 de Equações diferenciais e de diferenças
Laboratório — Maple
MAT 1154 — 2009.1
Data: 8 de julho de 2009

Nome: GABARITO ______________________________ Matrícula: ____________
Assinatura: ______________________________ Turma: ____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	0.5		
1b	0.5		
1c	0.5		
2a	0.5		
2b	0.5		
3a	0.5		
3b	0.5		
Total	3.5		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou preta.
  Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Você pode usar qualquer versão de maple.
  Dentro do maple você pode usar qualquer biblioteca ou função.
  O uso de outros programas é permitido mas não é encorajado.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Seja y a solução do problema de valor inicial abaixo:

$$y''(t) + e^t\, y(t) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

   (a) Diga se existe $t > 0$ com $y(t) = 0$. Se existir, encontre o valor aproximado de tal t com módulo mínimo.

   (b) Diga se existe $t < 0$ com $y(t) = 0$. Se existir, encontre o valor aproximado de tal t com módulo mínimo.

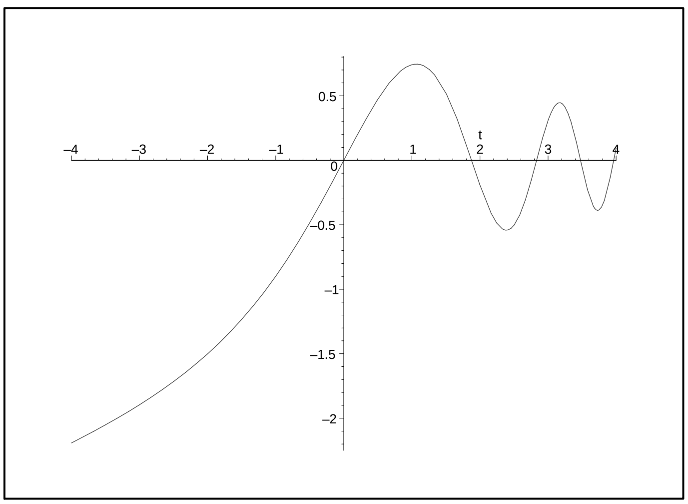
   (c) Calcule $y^{(k)}(0)$ para $k \leq 7$.

Solução:

Podemos resolver a EDO e esboçar o gráfico de $y(t)$ com os comandos:

```
yy := rhs(dsolve([diff(y(t),t,t)+exp(t)*y(t)=0,
y(0)=0,D(y)(0)=1],y(t)));
plot(yy,t=-4..4);
```

o que dá o gráfico abaixo:

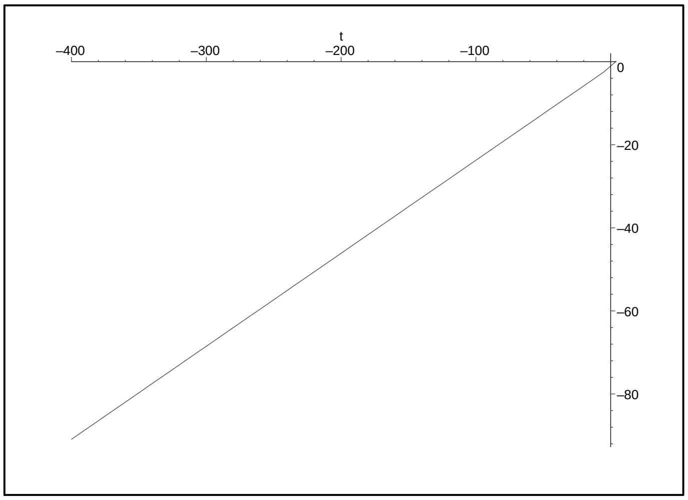


Pelo gráfico, vemos que existe um único $t \in [3/2, 2]$ com $y(t) = 0$. O comando `Digits := 12: fsolve(yy=0,t=2);` nos dá $t \approx 1.87548478950$.

O gráfico acima sugere que $y(t) < 0$ para $t < 0$. O comando `plot(yy,t=-400..4);` nos dá o gráfico abaixo, que confirma nossas suspeitas.

O comando

```
Order := 10:
dsolve([diff(y(t),t,t)+exp(t)*y(t)=0,
```




```
y(0)=0,D(y)(0)=1],y(t),series);
```

nos dá

$$y\,(t) = (t - \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{60}t^5 + \frac{1}{360}t^6 + \frac{17}{5040}t^7 + \frac{3}{2240}t^8 + \frac{109}{362880}t^9 + O\left(t^{10}\right))$$

donde

$$y^{(2)}(0) = 0, \quad y^{(3)}(0) = -1, \quad y^{(4)}(0) = -2,$$
$$y^{(5)}(0) = -2, \quad y^{(6)}(0) = 2, \quad y^{(7)}(0) = 17.$$

2. Considere o sistema de equações diferenciais:

$$y_1'(t) = -y_2(t) + y_1(t)(1 - (y_1(t))^2 - (y_2(t))^2),$$
$$y_2'(t) = y_1(t) + y_2(t)(1 - (y_1(t))^2 - (y_2(t))^2).$$

Diga se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas; justifique.

(a) Se $y_1(0) = y_2(0) = 1$ então $\lim_{t\to+\infty} y_1(t) = 0$.

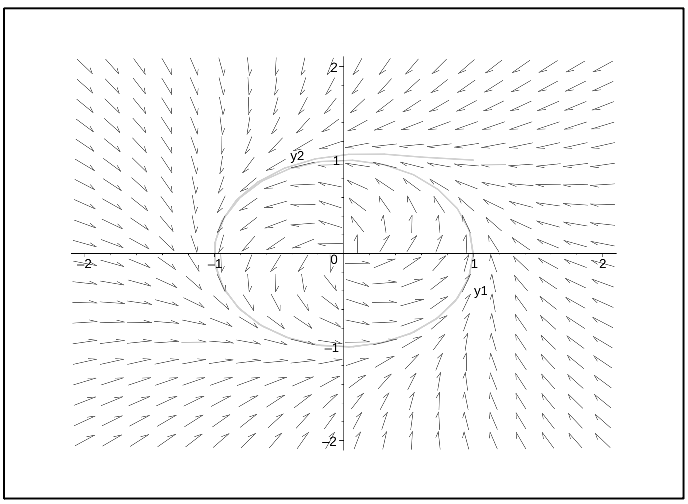
(b) O sistema admite pelo menos uma solução periódica não constante.

Solução:

Os comandos

```
with(DEtools):
DEplot([diff(y1(t),t)=-y2(t)+y1(t)*(1-(y1(t))^ 2-(y2(t))^ 2),
diff(y2(t),t)=y1(t)+y2(t)*(1-(y1(t))^ 2-(y2(t))^ 2)],
[y1(t),y2(t)],t=0..12,y1=-2..2,y2=-2..2,[[y1(0)=1,y2(0)=1]]);
```

produzem o gráfico abaixo:



Pelo gráfico é bem claro que para t grande $(y_1(t), y_2(t))$ acompanha uma solução periódica não constante. Assim o item (a) é **FALSO** e o item (b) é **VERDADEIRO**.

3. Seja (a_n) a sequência definida pela equação de diferenças

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(2n+1)(2n+2)}, \quad a_0 = 1.$$

Seja

$$y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots .$$

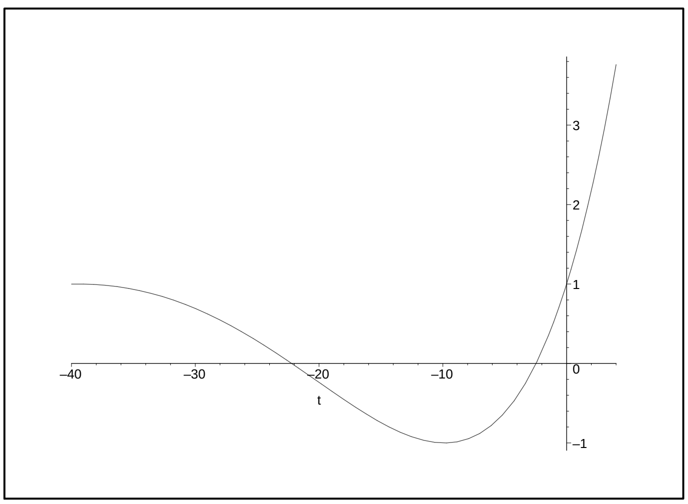
(a) Calcule o valor aproximado de

$$a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 + \cdots + (-2)^k a_k + \cdots .$$

(b) Diga se a função y é crescente de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$; justifique.

Solução:

Temos $a_k = 1/(2k)!$. Fazendo `y := sum(t^ k/((2*k)!),k=0..infinity);` vemos que $y = \cosh(\sqrt{t})$. Fazendo `Digits := 12:` `evalf(subs(t=-2,y));` temos que o valor da série do item (a) é aproximadamente .155943694768. Fazendo `plot(y,t=-40..4);` temos o gráfico abaixo:



Assim a função é crescente em um intervalo ao redor de $t = 0$ mas não é crescente de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.