P1 de Equações diferenciais e de diferenças
MAT 1154 — 2011.2
Data: 14 de setembro de 2011

Nome: GABARITO ______________________ Matrícula: __________
Assinatura: ______________________ Turma: __________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	1.0		
1b	1.0		
1c	1.0		
2a	1.0		
2b	1.0		
3	2.0		
Prova	7.0		
Teste	3.0		
Nota final	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou preta.
  Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva os problemas de valor inicial abaixo, isto é, encontre a função $y(x)$ que satisfaz a equação diferencial e as condições iniciais dadas.

   (a)
$$y' - x\,y^2 = x, \quad y(0) = 1.$$

Solução:

Reescreva a equação como

$$\frac{dy}{dx} = x(y^2 + 1)$$

donde

$$\int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int x\,dx$$

donde, para uma constante C apropriada,

$$\arctan(y) = \frac{x^2}{2} + C$$

donde

$$y(x) = \tan\left(\frac{x^2}{2} + C\right).$$

Substituindo a condição inicial temos

$$y(0) = \tan(C) = 1$$

donde $C = \pi/4$. Assim

$$y(x) = \tan\left(\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

(b)

$$y' + 2x\,y = x^2 + 1/2, \quad y(0) = 1.$$

Solução:
Esta é uma EDO linear de primeira ordem. Vamos primeiramente resolver a EDO homogênea associada:

$$y_h' + 2x\,y_h = 0.$$

Separando as variáveis, temos

$$\int \frac{dy_h}{y_h} = -\int 2x\,dx$$

donde podemos tomar

$$y_h(x) = \exp(-x^2).$$

Vamos agora procurar uma solução particular. Como o lado direito é um polinômio de grau 2 é natural procurar se existe uma solução polinomial; de fato existe:

$$y_p(x) = \frac{x}{2}.$$

Assim a solução geral da EDO é

$$y(x) = \frac{x}{2} + C\,\exp(-x^2).$$

Substituindo $x = 0$ e aplicando a condição inicial temos

$$y(0) = 1 = C$$

donde a solução procurada é

$$y(x) = \frac{x}{2} + \exp(-x^2).$$

(c)

$$y'' - 9y' + 14y = e^{3x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Solução:

A equação algébrica associada $\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$ tem raízes reais distintas $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 7$ donde a solução da EDO homogênea associada é

$$y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{7x}.$$

É natural procurar uma solução particular da forma $y_p(x) = Ce^{3x}$; substituindo na EDO temos

$$9Ce^{3x} - 27Ce^{3x} + 14Ce^{3x} = -4Ce^{3x} = e^{3x}$$

donde $C = -1/4$ e a solução geral da EDO é

$$y(x) = -\frac{1}{4}e^{3x} + C_1 e^{2x} + C_2 e^{7x}.$$

Note que

$$y'(x) = -\frac{3}{4}e^{3x} + 2C_1 e^{2x} + 7C_2 e^{7x}.$$

Assim, aplicando as condições iniciais temos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} + C_1 + C_2 &= 0 \\ -\frac{3}{4} + 2C_1 + 7C_2 &= 1 \end{aligned}$$

e, resolvendo o sistema, temos $C_1 = 0$ e $C_2 = 1/4$ e portanto

$$y(x) = -\frac{1}{4}e^{3x} + \frac{1}{4}e^{7x}.$$

2. Resolva as equações de diferenças abaixo:

   (a)
$$y(n+1) = (y(n))^2 - 2n\, y(n) + 2, \quad y(0) = 1.$$

   Solução:

   Vamos calcular $y(n)$ para alguns valores de n:

$$\begin{aligned}
y(1) &= (y(0))^2 - 2 \cdot 0\, y(0) + 2 = 3; \\
y(2) &= (y(1))^2 - 2 \cdot 1\, y(1) + 2 = 5; \\
y(3) &= (y(2))^2 - 2 \cdot 2\, y(2) + 2 = 7; \\
y(4) &= (y(3))^2 - 2 \cdot 3\, y(3) + 2 = 9; \\
y(5) &= (y(4))^2 - 2 \cdot 4\, y(4) + 2 = 11.
\end{aligned}$$

   Neste ponto é natural conjecturar que $y(n) = 2n + 1$ para todo n. Substituindo na equação, devemos verificar se vale para todo n a seguinte identidade:

$$2(n+1) + 1 = (2n+1)^2 - 2n(2n+1) + 2.$$

   A resposta claramente é sim. Temos portanto

$$y(n) = 2n + 1.$$

(b)

$$y(n+2) = 4y(n+1) - 4y(n) + 2^n, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Solução:

A equação é linear com coeficientes constantes, segunda ordem. A equação algébrica associada $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ tem raiz dupla $\lambda = 2$ donde a equação homogênea associada tem solução

$$y_h(n) = C_1 2^n + C_2 n\, 2^n.$$

Devemos procurar uma solução particular da forma $y_p(n) = Cn^2\, 2^n$; substituindo vemos que de fato existe uma solução desta forma para $C = 1/8$. Assim a solução geral é

$$y(n) = \left(\frac{n^2}{8} + C_2 n + C_1\right) 2^n;$$

Substituindo $n = 0$ e $n = 1$ encontramos os valores $C_1 = 0$ e $C_2 = -1/8$ donde

$$y(n) = n(n-1)\, 2^{n-3}.$$

3. Para $s \in \mathbb{R}$ um parâmetro real, considere a equação diferencial

$$y''(t) + s\,y(t) = 0. \tag{$*$}$$

Para quais valores do parâmetro s a equação $(*)$ admite uma solução y satisfazendo $y(0) = 0$ e $y(1) = 1$?

Solução:

A EDO é linear homogênea com coeficientes constantes, com equação algébrica associada $\lambda^2 + s = 0$. É conveniente separar em casos: $s < 0$, $s = 0$ e $s > 0$.

Para $s < 0$ as raízes da equação algébrica são os reais distintos $\lambda_1 = \sqrt{-s}$ e $\lambda_2 = -\sqrt{-s}$ donde a solução geral da EDO é

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

A condição $y(0) = 0$ nos dá $C_2 = -C_1$ donde

$$y(t) = C_1 \left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t} \right).$$

A condição $y(1) = 1$ nos permite encontrar C_1 e deduzir que

$$y(t) = \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}}.$$

Note que como $\lambda_1 > \lambda_2$ o denominador é não nulo. Assim, para todo $s < 0$ existe uma solução satisfazendo as condições do enunciado.

Para $s = 0$ temos uma raiz dupla $\lambda = 0$ e a solução geral da EDO é

$$y(t) = C_1 + C_2 t.$$

Para satisfazer as condições $y(0) = 0$ e $y(1) = 1$ basta tomar $C_1 = 0$, $C_2 = 1$ e $y(t) = t$.

Para $s > 0$ as raízes da equação algébrica são os complexos conjugados $\lambda_1 = i\sqrt{s}$ e $\lambda_2 = -i\sqrt{s}$ donde a solução geral da EDO é

$$y(t) = C_1 \cos(\sqrt{s}\,t) + C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{s}\,t).$$

A condição $y(0) = 0$ nos dá $C_1 = 0$ donde

$$y(t) = C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{s}\,t).$$

A condição $y(1) = 1$ equivale a $C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{s}) = 1$; esta condição nos permite determinar C_2 unicamente *exceto* se $\operatorname{sen}(\sqrt{s}) = 0$, ou seja, *exceto* para $s = k^2\pi^2$, k inteiro positivo. Para estes valores, toda solução que satisfizer $y(0) = 0$ automaticamente satisfaz $y(1) = 0$ e não existe portanto solução satisfazendo as condições do enunciado.

Conclusão final Existe solução satisfazendo as condições do enunciado *exceto* para s da forma $s = k^2\pi^2$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.