P2 de Equações diferenciais e de diferenças
MAT 1154 — 2011.2
Data: 20 de outubro de 2011

Nome: GABARITO ______________________ Matrícula: __________
Assinatura: ______________________ Turma: __________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	1.0		
1b	1.0		
2	1.0		
3a	0.8		
3b	0.8		
3c	0.8		
4a	0.8		
4b	0.8		
Prova	7.0		
Teste	3.0		
Nota final	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou preta.
  Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva os problemas de valor inicial abaixo:

   (a)

$$\mathbf{y}' - A\mathbf{y} = b(t), \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},$$
$$b(t) = \begin{pmatrix} 3\cos(t) + \operatorname{sen}(t) \\ 4\cos(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Solução:

Temos
$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -4 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda - 1)$$
donde A tem autovalores reais distintos $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 1$. Calculando os autovetores encontramos $v_1 = (1, 2)$ e $v_2 = (1, -2)$ donde a solução da equação homogênea associada é

$$\mathbf{y}_h(t) = C_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

É natural conjecturar que exista uma solução particular da forma

$$\mathbf{y}_p(t) = \begin{pmatrix} C_3 \cos(t) + C_4 \operatorname{sen}(t) \\ C_5 \cos(t) + C_6 \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix};$$

substituindo na equação de fato encontramos a solução particular

$$\mathbf{y}_p(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

e a solução geral da equação é

$$\mathbf{y}(t) = C_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Substituindo a condição inicial deduzimos que $C_1 = 1$ e $C_2 = 0$ donde

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} e^{5t} - \cos(t) \\ 2e^{5t} \end{pmatrix}.$$

(b)
$$y_1' = 6y_1 - y_2, \quad y_2' = 4y_1 + 6y_2, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0.$$

Solução:
Vamos escrever a matriz associada e calcular sua exponencial.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix};$$
$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 6 & 1 \\ -4 & \lambda - 6 \end{pmatrix} = (\lambda - (6+2i))(\lambda - (6-2i)).$$

Assim $\exp(tA) = \alpha A + \beta I$ onde $\alpha(6 \pm 2i) + \beta = e^{6t}(\cos(2t) \pm i \operatorname{sen}(2t))$ e portanto

$$\alpha = \frac{e^{6t} \operatorname{sen}(2t)}{2}; \qquad \beta = e^{6t}(\cos(2t) - 3 \operatorname{sen}(2t))$$

e
$$\exp(tA) = \frac{1}{2} e^{6t} \begin{pmatrix} 2\cos(2t) & -\operatorname{sen}(2t) \\ 4\operatorname{sen}(2t) & 2\cos(2t) \end{pmatrix}$$

e
$$y_1(t) = e^{6t} \cos(2t), \quad y_2(t) = 2e^{6t} \operatorname{sen}(2t).$$

2. Resolva o sistema de equações de diferenças abaixo:

$$a_{n+1} = 3a_n - b_n + 2^n, \quad b_{n+1} = a_n + b_n,$$
$$a_0 = 1, \quad b_0 = 0.$$

Solução:

Seja

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a matriz de coeficientes do sistema, que tem autovalor duplo $\lambda = 2$.
Observando que a parte não homogênea também envolve 2^n é natural conjectur que a solução é da forma

$$a_n = 2^n(C_1 n^2 + C_2 n + C_3), \qquad b_n = 2^n(C_4 n^2 + C_5 n + C_6).$$

Pelas equações do enunciado encontramos

$$a_1 = 4, \quad b_1 = 1, \quad a_2 = 13, \quad b_2 = 5$$

e resolvendo o sistema encontramos os coeficientes:

$$a_n = 2^{n-3}(n^2 + 7n + 8), \quad b_n = 2^{n-3}(n^2 + 3n).$$

Resta apenas substituir estas expressões nas equações originais e expandir para verificar que as fórmulas são corretas:

$$2^{n-2}((n+1)^2 + 7(n+1) + 8) \stackrel{?}{=} 3 \cdot 2^{n-3}(n^2 + 7n + 8) - 2^{n-3}(n^2 + 3n) + 2^n,$$
$$2^{n-2}((n+1)^2 + 3(n+1)) \stackrel{?}{=} 2^{n-3}(n^2 + 7n + 8) + 2^{n-3}(n^2 + 3n);$$

dividindo por 2^{n-3} e expandindo temos

$$2n^2 + 4n + 2 + 14n + 14 + 16 \stackrel{?}{=} 3n^2 + 21n + 24 - n^2 - 3n + 8,$$
$$2n^2 + 4n + 2 + 6n + 6 \stackrel{?}{=} n^2 + 7n + 8 + n^2 + 3n,$$

ambas corretas, completando a verificação.

3. Para cada uma das curvas $\mathcal{C}$ abaixo, diga se existe uma matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ (ou seja, real quadrada de ordem 2) e uma solução não constante $\mathbf{y}$ da equação $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ tal que a imagem de $\mathbf{y}$ (no diagrama de fase) esteja contida em $\mathcal{C}$. Se existir dê exemplo de A e de $\mathbf{y}$; se não existir justifique a sua afirmação.

   (a) A curva $x^2 - y^3 = 0$.

   Solução:

   A equação pode ser reescrita como $x = z^3$, $y = z^2$; tomando $z = e^t$ temos

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

   (b) A reta $x + y = 1$.

   Solução:

   Podemos parametrizar a reta por

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}$$

   que é compatível com a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Uma outra solução correta é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 1-e^t \end{pmatrix}.$$

(c) A elipse $x^2 + xy + y^2 = 1$.

Solução:

O problema fica mais fácil se fizermos uma mudança de variáveis: tome

$$x = u + v, \quad y = v - u, \quad u = \frac{x - y}{2}, \quad v = \frac{x + y}{2}$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

onde

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nas novas coordenadas a elipse tem equação

$$(u + v)^2 + (u + v)(v - u) + (v - u)^2 = u^2 + 3v^2 = 1$$

que pode ser parametrizada por

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}$$

que satisfaz a EDO

$$\mathbf{z}'(t) = B\mathbf{z}(t), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para resolver o problema original agora basta traduzir de volta para as variáveis x e y:

$$\mathbf{y}(t) = M\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}(t) \\ -\cos(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix},$$

$$A = MBM^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. (a) Diga se existe uma equação de diferenças da forma $\mathbf{y}(n+1) = A\mathbf{y}(n)$ e uma solução $\mathbf{y}_1(n)$ satisfazendo $\mathbf{y}_1(0) = (1,0)$, $\mathbf{y}_1(5) = (0,2)$, $\mathbf{y}_1(10) = (4,0)$. Se existir dê exemplo; se não existir justifique a sua afirmação.

Solução:

As condições do enunciado são equivalentes a

$$A^5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A^5 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde

$$A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por cálculo funcional encontramos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt[5]{2} \\ \sqrt[5]{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Diga se existe uma equação de diferenças da forma $\mathbf{y}(n+1) = A\mathbf{y}(n)$ e uma solução $\mathbf{y}_2(n)$ satisfazendo $\mathbf{y}_2(0) = (1,0)$, $\mathbf{y}_2(6) = (0,2)$, $\mathbf{y}_2(12) = (4,0)$. Se existir dê exemplo; se não existir justifique a sua afirmação.

Solução:

Analogamente ao item anterior, as condições do enunciado são equivalentes a

$$A^6 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mas isto implica em $(\det(A))^6 = \det(A^6) = -4 < 0$, uma contradição se supusermos A real.