

Teste 2 de Equações diferenciais e de diferenças

Laboratório — Maple

MAT 1154 — 2011.2

Data: 19 de outubro de 2011 — 17:00-17:50

Nome: _____ Matrícula: _____

Assinatura: _____ Turma: _____

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	1.0		
2a	1.0		
2b	1.0		
Total	3.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou preta. Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Recomenda-se usar o Maple 11 (mas é permitido usar qualquer versão). Dentro do maple você pode usar qualquer biblioteca ou função. O uso de outros programas é permitido mas não é encorajado.
- Salve a sua seção Maple no drive N com o seguinte nome: [Seu nome]_[matrícula].
- As respostas devem ser escritas (ou transcritas) no papel, sempre com justificativa. O arquivo da seção Maple deve ser encarado como um anexo.

1. Resolva o sistema de equações de diferenças:

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= 2a_n + b_n + c_n + 1, \\b_{n+1} &= a_n + 2b_n + c_n + d_n + n, \\c_{n+1} &= a_n + b_n + 2c_n + d_n + n, \\d_{n+1} &= b_n + c_n + 2d_n + 1, \\a_0 &= 0, \quad b_0 = c_0 = 1, \quad d_0 = 0.\end{aligned}$$

Solução:

O comando a seguir resolve o sistema:

```
rsolve({a(n+1) = 2*a(n)+b(n)+c(n)+1,
b(n+1) = a(n)+2*b(n)+c(n)+d(n)+n,
c(n+1) = a(n)+b(n)+2*c(n)+d(n)+n,
d(n+1) = b(n)+c(n)+2*d(n)+1,
a(0) = 0, b(0) = 1, c(0)=1,d(0)=0},
{a(n),b(n),c(n),d(n)});
```

É necessário um pouco mais de trabalho para obter uma expressão relativamente simples:

$$\begin{aligned}a_n = d_n &= \frac{-85 + 31\sqrt{17}}{68} \left(\frac{5 + \sqrt{17}}{2} \right)^n + \frac{-85 - 31\sqrt{17}}{68} \left(\frac{5 - \sqrt{17}}{2} \right)^n + \frac{5}{2} - n; \\b_n = c_n &= \frac{221 - 27\sqrt{17}}{136} \left(\frac{5 + \sqrt{17}}{2} \right)^n + \frac{221 + 27\sqrt{17}}{136} \left(\frac{5 - \sqrt{17}}{2} \right)^n - \frac{9}{4} + \frac{n}{2}.\end{aligned}$$

2. Lembre que uma função f é periódica com período $T > 0$ se $f(t + T) = f(t)$ para todo t .

Considere o sistema de equações diferenciais abaixo:

$$\begin{aligned}y_1'(t) &= y_2(t), \\ y_2'(t) &= -\frac{\exp(y_1(t)) - \exp(-y_1(t))}{2}.\end{aligned}$$

Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa; justifique. (Sugestão: faça um esboço do diagrama de fase.)

- (a) Toda solução do sistema é periódica.
(b) Toda solução periódica do sistema tem o mesmo período.

Solução:

Os comandos a seguir foram usados para fazer um esboço (veja arquivo em anexo):

```
with(DEtools):
de1 := diff(y1(t), t) = y2(t);
de2m := diff(y2(t), t) = -(exp(y1(t))-exp(-y1(t)))*1/2;
DEplot([de1, de2m], [y1(t), y2(t)],
t = 0 .. 10, y1 = -5 .. 5, y2 = -10 .. 10,
[[y1(0) = .5, y2(0) = 0], [y1(0) = 1.0, y2(0) = 0],
[y1(0) = 2.0, y2(0) = 0], [y1(0) = 4.0, y2(0) = 0]],
animatecurves = true, linecolor = blue);
```

Pelo esboço é claro que toda solução é periódica mas que o período varia (as curvas mais próximas da origem demoram mais para completar uma volta). Assim (a) é **verdadeiro** e (b) é **falso**.