

Teste 2 de Equações diferenciais e de diferenças

Laboratório — Maple

MAT 1154 — 2011.2

Data: 19 de outubro de 2011 — 17:00-17:50

Nome: _____ Matrícula: _____

Assinatura: _____ Turma: _____

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	1.0		
2a	1.0		
2b	1.0		
Total	3.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou preta. Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Recomenda-se usar o Maple 11 (mas é permitido usar qualquer versão). Dentro do maple você pode usar qualquer biblioteca ou função. O uso de outros programas é permitido mas não é encorajado.
- Salve a sua seção Maple no drive N com o seguinte nome: [Seu nome]_[matrícula].
- As respostas devem ser escritas (ou transcritas) no papel, sempre com justificativa. O arquivo da seção Maple deve ser encarado como um anexo.

1. Resolva o sistema de equações de diferenças:

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= 2a_n + b_n - c_n + n, \\b_{n+1} &= a_n + 2b_n + c_n - d_n - 1, \\c_{n+1} &= -a_n + b_n + 2c_n + d_n - 1, \\d_{n+1} &= -b_n + c_n + 2d_n + n, \\a_0 &= 1, \quad b_0 = c_0 = 0, \quad d_0 = 1.\end{aligned}$$

Solução:

O comando a seguir resolve o sistema:

```
rsolve({a(n+1) = 2*a(n)+b(n)-c(n)+n,  
b(n+1) = a(n)+2*b(n)+c(n)-d(n)-1,  
c(n+1) = -a(n)+b(n)+2*c(n)+d(n)-1,  
d(n+1) = -b(n)+c(n)+2*d(n)+n,  
a(0) = 1, b(0) = 0, c(0)=0,d(0)=1},  
{a(n),b(n),c(n),d(n)});
```

Simplificando:

$$\begin{aligned}a_n = d_n &= 2^{n+1} - n - 1; \\b_n = c_n &= \frac{3^n - 1}{2}.\end{aligned}$$

2. Lembre que uma função f é periódica com período $T > 0$ se $f(t + T) = f(t)$ para todo t .

Considere o sistema de equações diferenciais abaixo:

$$\begin{aligned}y_1'(t) &= y_2(t), \\y_2'(t) &= -\operatorname{sen}(y_1(t)) - cy_2(t), \quad c = 0.1.\end{aligned}$$

Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa; justifique. (Sugestão: faça um esboço do diagrama de fase.)

- (a) O sistema admite solução periódica não constante.
(b) Para toda solução do sistema existe o limite abaixo:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_1(t).$$

Solução:

Os comandos a seguir foram usados para fazer um esboço (veja arquivo em anexo):

```
with(DEtools):
de1 := diff(y1(t), t) = y2(t);
de2n := diff(y2(t), t) = -sin(y1(t))-.1*y2(t);
DEplot([de1, de2n], [y1(t), y2(t)],
t = 0 .. 20, y1 = -4 .. 20, y2 = -4 .. 4,
[[y1(0) = .5, y2(0) = 0], [y1(0) = 1.0, y2(0) = 0],
[y1(0) = 2.0, y2(0) = 0], [y1(0) = 4.0, y2(0) = 0],
[y1(0) = 0, y2(0) = 2.5], [y1(0) = 0, y2(0) = 3.5]],
animatecurves = true, linecolor = blue);
```

Pelo esboço é claro que quase toda solução não constante espirala em direção a um dos pontos $(2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$ (centros das espirais). Por outro lado, algumas raras soluções tendem para um dos pontos de sela $((2k + 1)\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$. Assim (a) é **falso** e (b) é **verdadeiro**.