P3 de Equações diferenciais e de diferenças
MAT 1154 — 2011.2
Data: 21 de novembro de 2011

Nome: GABARITO ______________________ Matrícula: __________
Assinatura: ______________________ Turma: __________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	0.8		
1b	0.8		
2a	0.8		
2b	0.8		
3a	0.7		
3b	0.7		
3c	0.8		
4a	0.8		
4b	0.8		
Prova	7.0		
Teste	3.0		
Nota final	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou preta.
  Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Diga se as séries abaixo são convergentes ou divergentes; justifique.

(a)

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = 1 + \frac{(1!)^2}{2!} + \frac{(2!)^2}{4!} + \frac{(3!)^2}{6!} + \cdots$$

Solução:

A série é **convergente** como pode ser verificado pelo teste da razão:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2(2n)!}{(n!)^2(2(n+1))!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4} < 1.$$

(b)

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{0}}{\sqrt{1}} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{4} - \sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \cdots$$

Solução:

A série é **divergente** como pode ser verificado pelo teste da comparação. De fato,

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \frac{(n+1) - (n-1)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} > \frac{2}{2\sqrt{n+1}}$$

donde

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}} > \frac{1}{n+1}.$$

Mas

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+1}$$

sabidamente diverge (série harmônica).

2. Calcule o termo geral da expansão em série de potências de cada uma das funções abaixo (ao redor de $x = 0$).

(a)

$$y = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Solução:

Temos

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

donde

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

e portanto

$$y = \frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{(n+1)!} + \cdots .$$

(b)

$$y = \int_0^x \frac{1}{t^2 - 5t + 6}\, dt$$

Solução: Temos (frações parciais)

$$\frac{1}{t^2 - 5t + 6} = \frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2};$$

ora, sabemos que

$$\frac{1}{t-a} = -a^{-1} - a^{-2}t - \cdots - a^{-n-1}t^n - \cdots$$

donde

$$\frac{1}{t^2 - 5t + 6} = (2^{-1} - 3^{-1}) + (2^{-2} - 3^{-2})t + \cdots + (2^{-n-1} - 3^{-n-1})t^n + \cdots .$$

Integrando,

$$y = (2^{-1} - 3^{-1})x + \frac{2^{-2} - 3^{-2}}{2}x^2 + \cdots + \frac{2^{-n} - 3^{-n}}{n}x^n + \cdots .$$

3. Considere o problema de valor inicial abaixo:

$$y''(t) + 2ty'(t) - y(t) = 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Considere ainda a expansão em série de potências da solução:

$$y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots + a_n t^n + \cdots .$$

(a) Encontre uma equação de diferenças relacionando os coeficientes a_n.

(b) Encontre a_n para $n \leq 6$.

(c) Calcule

$$\lim_{t \to 0} \frac{y(2t) - 1}{y(t) - 1}.$$

Solução:

(a) Pelo enunciado, $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$. Expandindo temos

$$\begin{aligned}
y'' &= 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + \cdots + (n+1)(n+2)a_{n+2}t^n + \cdots \\
2\,t\,y' &= 2a_1 t + 4a_2 t^2 + 6a_3 t^3 + \cdots + 2na_n t^n + \cdots \\
y &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots
\end{aligned}$$

donde

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + (2n-1)a_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

(b) Aplicando a equação de diferenças acima temos $a_2 = 1$, $a_3 = 0$, $a_4 = -1/4$, $a_5 = 0$, $a_6 = 7/120$.

(c) Temos

$$\begin{aligned}
y(t) - 1 &= t^2 - \frac{1}{4}t^4 + \cdots = t^2 \left(1 - \frac{1}{4}t^2 + \cdots\right) \\
y(2t) - 1 &= 4t^2 - 4t^4 + \cdots = t^2 \left(4 - 4t^2 + \cdots\right)
\end{aligned}$$

donde o limite pedido é igual a

$$\lim_{t \to 0} \frac{4 - 4t^2 + \cdots}{1 - \frac{1}{4}t^2 + \cdots} = 4.$$

4. Considere a equação de diferenças abaixo:

$$a_{k+2} = \frac{a_{k+1} + 2a_k}{k+2}, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 1.$$

(a) Calcule $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + \cdots$.

(b) Calcule $a_0 + 3a_1 + 5a_2 + \cdots + (2k+1)a_k + \cdots$.

Solução:

(a) Reescreva a equação como $(k+1)a_{k+1} - a_k - 2a_{k-1} = 0$. Observe que a equação vale para $k = 0$ com a convenção $a_{(-1)} = 0$. Temos

$$\begin{aligned} xy &= 0 + a_0 x + a_1 x^2 + \cdots + a_{k-1} x^k + \cdots \\ y' &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + (k+1)a_{k+1} x^k + \cdots \end{aligned}$$

donde

$$y' - y - 2xy = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Resolvendo a EDO por separação de variáveis,

$$\int \frac{dy}{y} = \int (1+2x)dx + C$$
$$y = \exp(x^2 + x).$$

(b) Temos $y' = (2x+1)\exp(x^2+x)$. Além disso,

$$\begin{aligned} y(1) &= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \cdots \\ y'(1) &= a_1 + 2a_2 + \cdots + k a_k + \cdots \\ y(1) + 2y'(1) &= a_0 + 3a_1 + 5a_2 + \cdots + (2k+1)a_k + \cdots \end{aligned}$$

Assim a soma pedida é igual a

$$y(1) + 2y'(1) = 7e^2.$$