P4 de Equações diferenciais e de diferenças

MAT 1154 — 2011.2

Data: 29 de novembro de 2011

Nome: GABARITO ______________________ Matrícula: ____________
Assinatura: ______________________ Turma: ____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	1.0		
1b	1.0		
1c	1.0		
2a	1.0		
2b	1.0		
3a	0.5		
3b	0.5		
3c	1.0		
Prova	7.0		
Teste	3.0		
Nota final	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou preta.
  Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva os problemas de valor inicial abaixo:

   (a)

$$2yy' + \cos t = 1, \qquad y(\pi) = 1.$$

Solução:

Reescreva a equação como

$$2y\frac{dy}{dt} = 1 - \cos t$$

donde

$$\int 2y dy = \int (1 - \cos t) dt + C$$

ou

$$y^2 = t - \operatorname{sen} t + C.$$

Como $y(\pi) = 1$ temos $C = 1 - \pi$ e

$$y(t) = \sqrt{1 - \pi + t - \operatorname{sen} t}.$$

   (b)

$$y'' + 11y' + 24y = e^{-t}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Solução:

A equação associada $\lambda^2 + 11\lambda + 24$ tem raízes $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = -8$. Assim a solução da EDO homogênea associada é

$$y_h = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-8t}.$$

É natural conjecturar que exista uma solução particular da forma $y_p = C_p e^{-t}$; substituindo verificamos que tal de fato ocorre para $C_p = 1/12$, donde a solução geral de equação é

$$y = \frac{1}{12}e^{-t} + C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-8t}.$$

Pelas condições iniciais temos

$$\frac{1}{12} + C_1 + C_2 = 0, \quad -\frac{1}{12} - 3C_1 - 8C_2 = 0$$

donde $C_1 = -7/60$ e $C_2 = 1/30$ e portanto

$$y = \frac{1}{12}e^{-t} - \frac{7}{60}e^{-3t} + \frac{1}{30}e^{-8t}.$$

(c)
$$y_1' = 7y_1 - 2y_2, \quad y_2' = 2y_1 + 3y_2, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

Solução:
Reescreva o pvi como

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \quad A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico de A é igual a

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 7 & 2 \\ -2 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = (\lambda - 5)^2.$$

De fato podemos escrever

$$A = S + N, \quad S = 5I, \quad N = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

com $SN = NS$ e $N^2 = 0$ de tal forma que $\exp(tA) = \exp(tS)\exp(tN)$.
Mas $\exp(tS) = e^{5t}I$ e $\exp(tN) = I + tN$ donde

$$\exp(tA) = e^{5t} \begin{pmatrix} 1 + 2t & -2t \\ 2t & 1 - 2t \end{pmatrix}$$

e portanto

$$\mathbf{y}(t) = \exp(tA)\mathbf{y}(0) = e^{5t} \begin{pmatrix} 1 + 2t & -2t \\ 2t & 1 - 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \end{pmatrix}$$

e portanto
$$y_1(t) = y_2(t) = e^{5t}.$$

2. Considere o sistema de equações de diferenças abaixo:

$$\mathbf{y}(n+1) - A\mathbf{y}(n) = \mathbf{b}(n), \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(n) = \begin{pmatrix} -1 + (-1)^n \\ 1 - 3(-1)^n \end{pmatrix}.$$

(a) Resolva o sistema.

(b) Calcule $\mathbf{y}(16)$ (simplifique sua resposta ao máximo).

Solução:

(a) Os autovalores de A são $1 \pm i = \sqrt{2}\exp(\pm\pi i/4)$ e portanto

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{(1+i)^n+(1-i)^n}{2} & \frac{(1+i)^n-(1-i)^n}{2i} \\ -\frac{(1+i)^n-(1-i)^n}{2i} & \frac{(1+i)^n+(1-i)^n}{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2^n}\begin{pmatrix} \cos(n\pi/4) & \operatorname{sen}(n\pi/4) \\ -\operatorname{sen}(n\pi/4) & \cos(n\pi/4) \end{pmatrix}.$$

É natural conjecturar que exista uma solução particular da forma

$$\mathbf{y}_p(n) = \begin{pmatrix} C_1 + (-1)^n C_2 \\ C_3 + (-1)^n C_4 \end{pmatrix};$$

substituindo verificamos que de fato temos a solução

$$\mathbf{y}_p(n) = \begin{pmatrix} 1 - (-1)^n \\ 1 + (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(n) &= \mathbf{y}_p(n) + A^n(\mathbf{y}(0) - \mathbf{y}_p(0)) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(1+i)^n+(1-i)^n}{2} + 1 - (-1)^n \\ -\frac{(1+i)^n-(1-i)^n}{2i} + 1 + (-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2^n}\cos(n\pi/4) + 1 - (-1)^n \\ -\sqrt{2^n}\operatorname{sen}(n\pi/4) + 1 + (-1)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Temos

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(16) &= \begin{pmatrix} \frac{(1+i)^{16}+(1-i)^{16}}{2} + 1 - (-1)^{16} \\ -\frac{(1+i)^{16}-(1-i)^{16}}{2i} + 1 + (-1)^{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^8\cos(4\pi) + 1 - (-1)^{16} \\ -2^8\operatorname{sen}(4\pi) + 1 + (-1)^{16} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 256 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Considere o problema de valor inicial abaixo:

$$y''(t) + \frac{y(t)}{1-t^2} = 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Considere ainda a expansão em série de potências da solução:

$$y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots + a_n t^n + \cdots .$$

(a) Encontre uma equação de diferenças relacionando os coeficientes a_n.

(b) Encontre a_n para $n \leq 6$.

(c) Seja

$$g(t) = \sqrt{1 - y(t)};$$

calcule $g'(0)$, $g''(0)$ e $g^{(3)}(0)$.

Solução:

(a) Reescreva a equação como

$$y''(t) - t^2 y''(t) + y(t) = 1 - t^2.$$

Temos

$$\begin{aligned} y'' &= 2a_2 + 6a_3 t + 12 a_4 t^2 + \cdots + (n+1)(n+2)a_{n+2} t^n + \cdots \\ t^2 y'' &= 0 + 0t + 2a_2 t^2 + \cdots + (n-1)n a_n t^n + \cdots \\ y &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots \end{aligned}$$

donde

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + (1 - n(n-1))a_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ -1, & n = 2, \\ 0, & n \neq 0, 2. \end{cases}$$

(b) Note que $a_0 = 1$, $a_1 = 0$. Aplicando a equação de diferenças temos

$$a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = -\frac{1}{12}, \quad a_5 = 0, \quad a_6 = -\frac{11}{360}.$$

(c) Temos

$$1 - y(1) = \frac{1}{12} t^4 + \frac{11}{360} t^6 + \cdots = \frac{1}{12}\, t^4 \left(1 + \frac{11}{30} t^2 + \cdots\right)$$

donde

$$g(t) = \sqrt{1 - y(t)} = \frac{1}{\sqrt{12}}\, t^2 \sqrt{1 + \frac{11}{30} t^2 + \cdots} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\, t^2 \left(1 + \frac{11}{60} t^2 + \cdots\right)$$

e portanto

$$g'(0) = 0, \quad g''(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad g^{(3)}(0) = 0.$$