

Teste 4 de Equações diferenciais e de diferenças  
Laboratório — Maple  
MAT 1154 — 2011.2

Data: 28 de novembro de 2011 — 18:00-18:50

Nome: \_\_\_\_\_ Matrícula: \_\_\_\_\_  
Assinatura: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_  
Número da máquina: \_\_\_\_\_ Sala: \_\_\_\_\_

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	1.0		
2a	0.5		
2b	0.5		
3	1.0		
Total	3.0		

## Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou preta. Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Recomenda-se usar o Maple 11 (mas é permitido usar qualquer versão). Dentro do maple você pode usar qualquer biblioteca ou função. O uso de outros programas é permitido mas não é encorajado.
- Salve a sua seção Maple no drive N com o seguinte nome: [Seu nome]\_[matrícula].
- As respostas devem ser escritas (ou transcritas) no papel, sempre com justificativa. O arquivo da seção Maple deve ser encarado como um anexo.

1. Considere a equação de diferenças:

$$\begin{aligned}y(n+1) &= y(n)y(0) + y(n-1)y(1) + \cdots + y(1)y(n-1) + y(0)y(n) \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n} y(n-k)y(k),\end{aligned}$$

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 1.$$

Calcule  $y(20)$ .

**Solução:**

Podemos calcular os primeiros termos com:

```
yy[0] := 1: yy[1] := 1:
for i to 20 do yy[i+1] := add(yy[i-k]*yy[k],k=0..i): od:
yy[20];
```

o que nos dá que  $y(20) = 6564120420$ .

2. Considere o sistema de equações diferenciais abaixo:

$$\begin{aligned}y_1'(t) &= y_2(t), \\ y_2'(t) &= (y_1(t))^3 - y_1(t).\end{aligned}$$

Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa; justifique.

- (a) Existe uma solução não constante e periódica.
- (b) Todas as soluções periódicas não constantes têm o mesmo período.

(Sugestão: faça um esboço do diagrama de fase.

Lembre que uma solução  $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))$  é periódica se existe  $T > 0$  tal que, para todo  $t$ ,  $\mathbf{y}(t + T) = \mathbf{y}(t)$ ; o menor número positivo  $T$  com esta propriedade é chamado de período.)

### Solução:

Podemos esboçar o diagrama de fase e duas soluções periódicas não constantes com:

```
with(DEtools):
ed1 := diff(y1(t),t) = y2(t);
ed2 := diff(y2(t),t) = (y1(t))**3 - y1(t);
DEplot([ed1,ed2],[y1(t),y2(t)],
t=0..8, y1=-2..2,y2=-2..2,
[[y1(0)=0.5,y2(0)=0],[y1(0)=0.9,y2(0)=0]]);
```

Observe que neste intervalo uma solução completa uma volta e a outra não. Assim a afirmação (a) é verdadeira e a afirmação (b) é falsa.

3. Seja

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{2^{2^k}} \\ &= \frac{1}{2^{2^0}} + \frac{t}{2^{2^1}} + \frac{t^2}{2^{2^2}} + \cdots + \frac{t^n}{2^{2^n}} + \cdots . \end{aligned}$$

Encontre o maior número real  $t$  para o qual  $f(t) = 0$   
(você deve determinar o valor de  $t$  com um erro menor do que  $10^{(-3)}$ ).

**Solução:**

Claramente para  $t > 0$  temos  $f(t) > 0$  (todos os termos do somatório são positivos).

Podemos definir a função e esboçar seu gráfico com

```
f := t -> sum(t**k/2**(2**k),k=0..infinity);  
plot(f(t),t=-15..0);
```

que mostra que existe uma solução para  $f(t) = 0$  perto de  $t = -12$ . O comando

```
fsolve(f(t)=0,t=-12);
```

encontra a raiz  $t = -12.19249551$ .