Teste 4 de Equações diferenciais e de diferenças
Laboratório — Maple
MAT 1154 — 2011.2
Data: 28 de novembro de 2011 — 18:00-18:50

Nome:______________________________ Matrícula:__________
Assinatura:______________________________ Turma:__________
Número da máquina:__________________________ Sala:__________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	1.0		
2a	0.5		
2b	0.5		
3	1.0		
Total	3.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou preta.
  Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Recomenda-se usar o Maple 11 (mas é permitido usar qualquer versão).
  Dentro do maple você pode usar qualquer biblioteca ou função.
  O uso de outros programas é permitido mas não é encorajado.
- Salve a sua seção Maple no drive `N` com o seguinte nome:
  `[Seu nome]_[matrícula]`.
- As respostas devem ser escritas (ou transcritas) no papel,
  sempre com justificativa.
  O arquivo da seção Maple deve ser encarado como um anexo.

1. Considere a equação de diferenças:

$$y(n+1) = (y(0))^2 + (y(1))^2 + \cdots + (y(n-1))^2 + (y(n))^2$$
$$= \sum_{0 \le k \le n} (y(k))^2,$$

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 1.$$

Calcule $y(20)$.

Solução:

Podemos calcular os primeiros termos com:

```
yy[0] := 1: yy[1] := 1:
for i to 20 do yy[i+1] := add((yy[k])**2,k=0..i): od:
yy[20];
evalf(yy[20]);
```

o primeiro comando nos dá um valor de $y(20)$ com 106721 algarismos; o segundo nos dá o valor aproximado $y(20) \approx 0.1166841411 \cdot 10^{106721}$.

2. Considere o sistema de equações diferenciais abaixo:

$$y_1'(t) = -(y_2(t))^3 + y_2(t),$$
$$y_2'(t) = y_1(t).$$

Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa; justifique.

(a) Existe uma solução não constante e periódica.

(b) Todas as soluções periódicas não constantes têm o mesmo período.

(Sugestão: faça um esboço do diagrama de fase.
Lembre que uma solução $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))$ é periódica se existe $T > 0$ tal que, para todo t, $\mathbf{y}(t+T) = \mathbf{y}(t)$; o menor número positivo T com esta propriedade é chamado de período.)

Solução:

Podemos esboçar o diagrama de fase e duas soluções periódicas não constantes com:

```
with(DEtools):
ed1 := diff(y1(t),t) = -(y2(t))**3 + y2(t);
ed2 := diff(y2(t),t) = y1(t);
DEplot([ed1,ed2],[y1(t),y2(t)],
t=0..6, y1=-2..2,y2=-2..2,
[[y1(0)=0,y2(0)=0.6],[y1(0)=0,y2(0)=0.1]]);
```

Observe que neste intervalo uma solução completa uma volta e a outra não.
Assim a afirmação (a) é verdadeira e a afirmação (b) é falsa.

3. Seja

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{2^{k^2}} \\ &= \frac{1}{2^{0^2}} + \frac{t}{2^{1^2}} + \frac{t^2}{2^{2^2}} + \cdots + \frac{t^n}{2^{n^2}} + \cdots . \end{aligned}$$

Encontre o maior número real t para o qual $f(t) = 0$
(você deve determinar o valor de t com um erro menor do que $10^{(-3)}$).

Solução:

Claramente para $t > 0$ temos $f(t) > 0$ (todos os termos do somatório são positivos).

Podemos definir a função e esboçar seu gráfico com

```
f := t -> sum(t**k/2**(k**2),k=0..infinity);
plot(f(t),t=-15..0);
```

que mostra que existe uma solução para $f(t) = 0$ perto de $t = -3$. O comando

```
fsolve(f(t)=0,t=-3);
```

encontra a raiz $t = -3.063476955$.