P1 de Equações diferenciais e de diferenças
MAT 1154 — 2012.1
Data: 12 de abril de 2012

Nome: GABARITO ______________________________ Matrícula: ____________
Assinatura: ______________________________ Turma: ____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	1.0		
1b	1.0		
2	1.0		
3a	1.0		
3b	1.0		
4a	1.0		
4b	1.0		
Prova	7.0		
Teste	3.0		
Nota final	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou preta.
  Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva os problemas de valor inicial abaixo, isto é, encontre a função $y(x)$ que satisfaz a equação diferencial e as condições iniciais dadas.

   (a)
$$y'' + 10y' + 24y = e^{-6x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Solução:
A equação $\lambda^2 + 10\lambda + 24 = 0$ tem raízes $\lambda_1 = -6$ e $\lambda_2 = -4$ donde a solução da EDO homogênea associada é $y_h = C_1 e^{-6x} + C_2 e^{-4x}$. É natural conjecturar que exista uma solução particular da forma $y_p = Cxe^{-6x}$. Temos

$$\begin{aligned} y_p' &= C(1-6x)e^{-6x}, \\ y_p'' &= C(-12+36x)e^{-6x}, \\ y_p'' + 10y_p' + 24y_p &= -2Ce^{-6x} = e^{-6x} \end{aligned}$$

donde $C = -1/2$. Assim a solução geral é

$$y = -\frac{1}{2}xe^{-6x} + C_1 e^{-6x} + C_2 e^{-4x}.$$

Temos $y(0) = C_1 + C_2 = 0$ e $y'(0) = -1/2 - 6C_1 - 4C_2 = 0$ donde $C_1 = -1/4$, $C_2 = 1/4$ e

$$y = -\frac{1}{2}xe^{-6x} - \frac{1}{4}e^{-6x} + \frac{1}{4}e^{-4x}.$$

(b)

$$y' - (1+x^2)\,y = 2x^4 + 2x^2 - 4x, \quad y(0) = 1.$$

Solução:

Esta é uma EDO linear. Vamos resolver inicialmente a EDO homogênea associada:

$$\begin{gathered}
y_h' - (1+x^2)\,y_h = 0; \\
\int \frac{dy_h}{y_h} = \int (1+x^2)dx; \\
\ln(y_h) = x + \frac{x^3}{3} + C; \\
y_h = \tilde{C}\exp\left(x + \frac{x^3}{3}\right).
\end{gathered}$$

Vamos procurar uma solução particular; como o lado direito é um polinômio é natural tentar se existe solução polinomial.

$$\begin{gathered}
y_p = ax^2 + bx + c \\
y_p' - (1+x^2)\,y_p = -ax^4 - bx^3 + (-a-c)x^2 + (2a-b)x + (b-c) = 2x^4 + 0x^3 + 2x^2 - 4x + 0 \\
a = -2, \quad b = c = 0.
\end{gathered}$$

Assim a solução geral é

$$y = -2x^2 + \tilde{C}\exp\left(x + \frac{x^3}{3}\right).$$

Temos $y(0) = \tilde{C} = 1$ donde

$$y = -2x^2 + \exp\left(x + \frac{x^3}{3}\right).$$

2. Encontre uma fórmula fechada para a soma abaixo:

$$1^2 2^1 + 2^2 2^2 + 3^2 2^3 + 4^2 2^4 + \cdots + n^2 2^n.$$

Solução:

Faça

$$y(n) = 1^2 2^1 + 2^2 2^2 + 3^2 2^3 + 4^2 2^4 + \cdots + n^2 2^n.$$

Temos $y(0) = 0$, $y(1) = 2$, $y(2) = 18$, $y(3) = 90$ e

$$y(n+1) - y(n) = (n+1)^2 2^{(} n+1).$$

A solução da equação homogênea associada é $y_h(n) = C$. É natural procurar uma solução particular da forma $y_p(n) = (an^2 + bn + c)2^n$. Temos

$$y_p(n+1) = (a(n+1)^2 + b(n+1) + c)2^{(n+1)} = (2an^2 + (4a+2b)n + (2a+2b+2c))2^n$$
$$y_p(n+1) - y_p(n) = (an^2 + (4a+b)n + (2a+2b+c))2^n = (2n^2 + 4n + 2)2^n$$
$$a = 2, \quad b = -4, \quad c = 6$$
$$y_p(n) = (2n^2 - 4n + 6)2^n$$

e portanto a solução geral é

$$y(n) = (2n^2 - 4n + 6)2^n + C.$$

Temos $y(0) = 6 + C = 0$ donde $C = -6$:

$$y(n) = (2n^2 - 4n + 6)2^n - 6.$$

3. Seja $y(n)$ a sequência definida recursivamente por

$$y(n+2) - 4y(n+1) + 8y(n) = 5, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2.$$

   (a) Encontre uma fórmula para $y(n)$.

   (b) Calcule $y(2012)$ (simplifique sua resposta ao máximo).

   Solução:

   A equação $\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$ tem raízes $2 \pm 2i$. Assim a solução da equação homogênea associada é $C_1(2+2i)^n + C_2(2-2i)^n$. Uma solução particular é $y_p = 1$. Assim a solução geral é

$$y(n) = 1 + C_1(2+2i)^n + C_2(2-2i)^n.$$

   Como $y(0) = 1 + C_1 + C_2 = 1$ e $y(1) = 1 + C_1(2+2i) + C_2(2-2i) = 2$ temos $C_1 = 1/(4i)$ e $C_2 = -1/(4i)$ e portanto

$$y(n) = 1 + \frac{(2+2i)^n - (2-2i)^n}{4i}.$$

   Para $\lambda_1 = 2 + 2i = \sqrt{8}e^{\pi i/4}$ temos $\lambda_1^{2012} = 8^{1006}e^{503\pi i} = -8^{1006}$.
   Analogamente para $\lambda_2 = 2 - 2i$ temos $\lambda_2^{2012} = -8^{1006}$. Assim

$$y(2012) = 1 + \frac{-8^{1006} + 8^{1006}}{4i} = 1.$$

4. Sabe-se que a equação diferencial linear (não homogênea com coeficientes constantes)

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b(t)$$

admite as seguintes soluções:

$$y_{p,1}(t) = \frac{t^4 + 5t^2 + 1}{t^2 + 1},$$
$$y_{p,2}(t) = \frac{t^4 + 5t^2 + 1}{t^2 + 1} + te^{-2t}.$$

Resolva os problemas de valor inicial abaixo:

(a)
$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

(b)
$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Solução:

Temos que $y_{p,2}(t) - y_{p,1}(t) = y_{h,1}(t) = te^{-2t}$ é solução da equação homogênea associada

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0.$$

Uma solução desta forma indica que $\lambda = -2$ é raiz dupla de $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ donde $a_1 = a_0 = 4$ e a solução geral de

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 0$$

é $y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-2t}$, com $y(0) = C_1$ e $y'(0) = -2C_1 + C_2$. Assim a solução do item (a) é

$$y(t) = te^{-2t}$$

e a solução do item (b) é

$$y(t) = (1 + 2t)e^{-2t}.$$