P2 de Equações diferenciais e de diferenças
MAT 1154 — 2012.1
Data: 17 de maio de 2012

Nome: GABARITO ______________________________ Matrícula: ____________
Assinatura: ______________________________ Turma: ____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	1.0		
1b	1.0		
2	1.0		
3a	1.0		
3b	1.0		
4a	1.0		
4b	1.0		
Prova	7.0		
Teste	3.0		
Nota final	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou preta.
  Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva os problemas de valor inicial abaixo:

(a)

$$\mathbf{y}' - A\mathbf{y} = b(t), \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},$$
$$b(t) = \begin{pmatrix} 5\cos(t) - \operatorname{sen}(t) \\ \cos(t) + 5\operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Solução:

Os autovalores de A são $\lambda_1 = 5 + 2i$ e $\lambda_2 = 5 - 2i$ e temos

$$\exp(tA) = e^{5t} \begin{pmatrix} \cos(2t) & -\operatorname{sen}(2t) \\ \operatorname{sen}(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

É natural conjecturar que exista uma solução particular da forma

$$\mathbf{y}_p(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t) + b\operatorname{sen}(t) \\ c\cos(t) + d\operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}.$$

Temos

$$\mathbf{y}_p'(t) - A\mathbf{y}_p(t) = \begin{pmatrix} (-5a + b + 2c)\cos(t) + (-a - 5b + 2d)\operatorname{sen}(t) \\ (-2a - 5c + d)\cos(t) + (-2b - c - 5d)\operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}$$

donde $a = -1$, $b = c = 0$, $d = -1$. Assim a solução geral é

$$\mathbf{y}(t) = e^{5t} \begin{pmatrix} \cos(2t) & -\operatorname{sen}(2t) \\ \operatorname{sen}(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}.$$

Para que sejam satisfeitas as condições iniciais devemos ter $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ donde

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} e^{5t}\cos(2t) - \cos(t) \\ e^{5t}\operatorname{sen}(2t) - \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}.$$

(b)
$$y_1' = 4y_1 - 3y_2, \quad y_2' = 3y_1 - 2y_2, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0.$$

Solução:
Podemos reescrever o problema como $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$,

$$A = S + N, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Note que $SN = NS$, $N^2 = 0$. Assim

$$\exp(tA) = e^t \begin{pmatrix} 1+3t & -3t \\ 3t & 1-3t \end{pmatrix}$$

e portanto

$$\mathbf{y}(t) = \exp(tA)\mathbf{y}(0) = e^t \begin{pmatrix} 1+3t \\ 3t \end{pmatrix}$$

ou, na notação original,

$$y_1(t) = (1+3t)e^t, \quad y_2(t) = 3te^t.$$

2. Resolva o sistema de equações de diferenças abaixo:

$$a(n+1) = -3a(n) + 12b(n) + 2^n, \quad b(n+1) = -4a(n) + 11b(n),$$
$$a(0) = 1, \quad b(0) = 0.$$

Solução:

Podemos reescrever o problema como $\mathbf{y}'(n+1) - A\mathbf{y}(n) = b(n)$,

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 12 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}, \quad b(n) = \begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Temos $p_A(\lambda) = (\lambda+3)(\lambda-11) + 48 = \lambda^2 - 8\lambda + 15$ donde $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$, com autovetores correspondentes $v_1 = (2,1)$, $v_2 = (3,2)$. É natural conjecturar que exista uma solução particular da forma $\mathbf{y}_p(n) = (a2^n, b2^n)$ o que nos dá o sistema

$$2a = -3a + 12b + 1, \quad 2b = -4a + 11b$$

donde $a = -3$ e $b = -4/3$. A solução geral é portanto

$$a(n) = 2C_1 \cdot 3^n + 3C_2 \cdot 5^n - 3 \cdot 2^n, \quad b(n) = C_1 \cdot 3^n + 2C_2 \cdot 5^n - \frac{4}{3} \cdot 2^n.$$

Ajustando as condições iniciais temos $C_1 = 4$, $C_2 = -4/3$ donde

$$a(n) = 8 \cdot 3^n - 4 \cdot 5^n - 3 \cdot 2^n, \quad b(n) = 4 \cdot 3^n - \frac{8}{3} \cdot 5^n - \frac{4}{3} \cdot 2^n.$$

3. (a) Dê um exemplo de uma matriz real $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ e de uma função $\mathbf{y}(n) = (y_1(n), y_2(n))$ satisfazendo $\mathbf{y}(n+1) = A\mathbf{y}(n)$ para todo n e tal que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{y_1(n) + y_2(n)}{n} = 4.$$

Solução:

Tome

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(n) = \begin{pmatrix} 4n \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Dê um exemplo de uma matriz real $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ e de uma função $\mathbf{y}(n) = (y_1(n), y_2(n))$ satisfazendo $\mathbf{y}(n+1) = A\mathbf{y}(n)$ para todo n e tal que

$$(y_1(n))^2 + y_1(n)y_2(n) - (y_2(n))^2 = 1, \quad \lim_{n\to+\infty} y_1(n) = +\infty.$$

Solução:

Tome

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

com autovalores

$$\lambda_1 = \phi^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \phi^{-2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \quad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Seja

$$F(n) = \frac{\phi^n - \bar{\phi}^n}{\sqrt{5}}, \quad \bar{\phi} = -\phi^{-1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Tome

$$\mathbf{y}(n) = \begin{pmatrix} F(2n+1) \\ F(2n+2) \end{pmatrix}.$$

4. (a) Diga se existe uma equação diferencial da forma $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ e uma solução $\mathbf{y}_1(t)$ satisfazendo $\mathbf{y}_1(0) = (1, 1)$, $\mathbf{y}_1(1) = (2, 3)$, $\mathbf{y}_1(2) = (5, 8)$. Se existir dê exemplo; se não existir justifique a sua afirmação.

Solução:

Seja $M = \exp(A)$. Devemos ter

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

com autovalores reais, distintos e positivos

$$\lambda_1 = \phi^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 0, \quad \lambda_2 = \phi^{-2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} > 0, \quad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

e autovetores correspondentes

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \phi \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -\phi \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$M = X \begin{pmatrix} \phi^2 & 0 \\ 0 & \phi^{-2} \end{pmatrix} X^{-1}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & -\phi \\ \phi & 1 \end{pmatrix}.$$

Podemos portanto tomar

$$A = X \begin{pmatrix} 2\ln(\phi) & 0 \\ 0 & -2\ln(\phi) \end{pmatrix} X^{-1}.$$

(b) Diga se existe uma equação diferencial da forma $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ e uma solução $\mathbf{y}_1(t)$ satisfazendo $\mathbf{y}_1(0) = (1, 0)$, $\mathbf{y}_1(1) = (1, 1)$, $\mathbf{y}_1(2) = (3, 2)$. Se existir dê exemplo; se não existir justifique a sua afirmação.

Solução:

Seja $M = \exp(A)$. Devemos ter

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos $\det(M) = -1$. Mas devemos ter $M = (\exp(A/2))^2$ donde $(\det(\exp(A/2)))^2 = -1$, uma contradição com a hipótese de A ser real. Assim não existe a equação diferencial pedida.