P4 de Equações diferenciais e de diferenças
MAT 1154 — 2012.1
Data: 3 de julho de 2012

Nome: GABARITO ______________________________ Matrícula: ____________
Assinatura: ______________________________ Turma: ____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	1.0		
1b	1.0		
1c	1.0		
2a	1.0		
2b	1.0		
3	2.0		
Prova	7.0		
Teste	3.0		
Nota final	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou preta.
  Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva os problemas de valor inicial abaixo:

   (a)
$$y' + (2\tan t)\, y(t) = 2\,\mathrm{sen}\, t, \qquad y(0) = 1.$$

Solução:

Esta é uma EDO linear de primeira ordem. A equação homogênea associada

$$y_h' + (2\tan t)\, y_h(t) = 0$$

tem solução

$$\begin{aligned} \frac{dy_h}{dt} &= -2\tan t\, y_h \\ \int \frac{dy_h}{y_h} &= 2\int \frac{-\,\mathrm{sen}\, t\, dt}{\cos t} = 2\int \frac{d(\cos t)}{\cos t} \\ \ln(y_h) &= 2\ln(\cos(t)) \\ y_h &= \cos^2(t) \end{aligned}$$

Vamos encontrar uma solução particular por variação dos parâmetros. Tome $y = zy_h$ e portanto $y' = z'y_h + zy_h'$; substituindo na equação original temos

$$z'y_h + zy_h' + (2\tan t)\, zy_h = z'\cos^2(t) = 2\,\mathrm{sen}(t)$$

donde $z' = 2\sec(t)\tan(t)$ e portanto $z = 2\sec(t)$ e $y_p = 2\cos(t)$. Assim a solução geral é

$$y = y_p + Cy_h = 2\cos(t) + C\cos^2(t).$$

Como $y(0) = 1$ temos $C = -1$ e

$$y = 2\cos(t) - \cos^2(t).$$

(b)

$$y'' + 7y' + 10y = e^{-2t}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Solução:

Esta é uma EDO linear de segunda ordem, coeficientes constantes. A equação algébrica associada $\lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0$ tem raízes $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -5$ donde a solução da EDO homogênea associada é $C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-5t}$.

É natural conjecturar que exista uma solução particular da forma $y_p = Cte^{-2t}$ com $y_p' = C(-2t+1)e^{-2t}$ e $y_p'' = C(4t-4)e^{-2t}$ e

$$y_p'' + 7y_p' + 10y_p = C(4t - 4 - 14t + 7 + 10t)e^{-2t} = 3Ce^{-2t} = e^{-2t}$$

donde $C = 1/3$ e a solução geral da EDO é

$$y = \frac{1}{3}te^{-2t} + C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-5t}.$$

Temos $y(0) = C_1 + C_2 = 0$ e $y'(0) = 1/3 - 2C_1 - 5C_2 = 0$ donde $C_1 = -1/9$ e $C_2 = 1/9$ e

$$y = \frac{1}{3}te^{-2t} - \frac{1}{9}e^{-2t} + \frac{1}{9}e^{-5t}.$$

(c)

$$y_1' = 3y_1 - 4y_2, \quad y_2' = y_1 + 3y_2, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0.$$

Solução:

Reescreva o problema como

$$\mathbf{y}'(t) - A\mathbf{y}(t) = 0, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que tem solução

$$\mathbf{y}(t) = e^{tA}\mathbf{y}(0).$$

Devemos calcular e^{tA}; os autovalores de A são $3 \pm 2i$ e aplicando o cálculo funcional temos

$$e^{tA} = \frac{1}{2}\, e^{3t} \begin{pmatrix} 2\cos(2t) & -4\,\mathrm{sen}(2t) \\ \mathrm{sen}(2t) & 2\cos(2t) \end{pmatrix}$$

e portanto

$$y_1(t) = e^{3t}\cos(2t), \quad y_2(t) = \frac{1}{2}\, e^{3t}\,\mathrm{sen}(2t).$$

2. Considere o sistema de equações de diferenças abaixo:

$$\mathbf{y}(n+1) - A\mathbf{y}(n) = \mathbf{b}(n), \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(n) = \begin{pmatrix} -7n+1 \\ 11n+1 \end{pmatrix}.$$

(a) Resolva o sistema.

(b) Calcule
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbf{y}(n+1) - 2\mathbf{y}(n)}{2^n}.$$

Solução:

(a) A matriz A tem autovalor duplo $\lambda = 2$. Escreva $A = S + N$,

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Temos $SN = NS$ e $N^2 = 0$ donde

$$A^n = S^n + nS^{n-1}N = 2^n \left(I + \frac{n}{2}N\right) = 2^n \begin{pmatrix} 1+2n & n \\ -4n & 1-2n \end{pmatrix}.$$

É natural conjecturar que exista uma solução particular com entradas afins em n; substituindo temos que

$$\mathbf{y}_p(n) = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}$$

e portanto

$$\mathbf{y}(n) = \begin{pmatrix} n + 2^n(1+2n) \\ n + 2^n(-4n) \end{pmatrix}.$$

(b) Temos

$$\frac{\mathbf{y}(n+1) - 2\mathbf{y}(n)}{2^n} =$$
$$= 2^{-n}\left(\begin{pmatrix} (n+1) + 2^{n+1}(1+2(n+1)) \\ (n+1) + 2^{n+1}(-4(n+1)) \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} n + 2^n(1+2n) \\ n + 2^n(-4n) \end{pmatrix}\right) =$$
$$= \begin{pmatrix} -n2^{-n} + 2^{-n} + 4 \\ -n2^{-n} + 2^{-n} - 8 \end{pmatrix}$$

e o limite pedido é igual a

$$\begin{pmatrix} +4 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

3. A função y é definida pelo problema de valor inicial

$$y''(t) + t^8\, y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Calcule

$$\lim_{t \to 0} \frac{t\, y'(t)}{y(t) - 1}.$$

Solução:

Escreva

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n + \cdots \\ t^8\, y &= a_0 t^8 + a_1 t^9 + \cdots + a_{n-8} t^n + \cdots \\ y'' &= 2a_2 + 2 \cdot 3 a_3 t + \cdots + (n+1)(n+2) a_{n+2} t^n + \cdots \end{aligned}$$

e temos

$$(n+1)(n+2) a_{n+2} + a_{n-8} = 0$$

ou

$$a_{n+10} = -\frac{a_n}{(n+9)(n+10)}, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 0$$

donde

$$a_2 = a_3 = \cdots = a_9 = 0, \quad a_{10} = -\frac{1}{90}, \quad a_{11} = a_{12} = \cdots = a_{19} = 0.$$

Temos

$$\begin{aligned} t\, y' &= -\frac{1}{9}\, t^{10}\, (1 + c t^{10} + \cdots) \\ y - 1 &= -\frac{1}{90}\, t^{10}\, (1 + \tilde{c} t^{10} + \cdots) \\ \frac{t\, y'}{y - 1} &= 10\, \frac{1 + c t^{10} + \cdots}{1 + \tilde{c} t^{10} + \cdots} \end{aligned}$$

e portanto o limite pedido é igual a 10.