MAT1154 Equações Diferenciais e de Diferenças
Listas de Exercícios
Período 2004.1

George Svetlichny

Sumário

1 Lista de Exercícios N$^{\underline{o}}$ 1

[Verifique sua resposta fazendo correta substituição e diferenciação]

1. Ache a solução geral das seguintes equações diferenciais:

    (a) $y' - y = 2\mathrm{e}^x$;

    (b) $y' + 2xy = 2x\mathrm{e}^{-x^2}$;

    (c) $xy' + 2y = \operatorname{sen} x$;

    (d) $(1 + x^2)y' + 4xy = (1 + x^2)^{-2}$.

2. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

    (a) $y' - y = 2\mathrm{e}^x$, $y(0) = 1$;

    (b) $xy' + 2y = \operatorname{sen} x$, $y(\pi/2) = 1$;

    (c) $xy' + (x + 1)y = x$, $y(\ln 2) = 1$;

    (d) $x^3y' + 4x^2y = \mathrm{e}^{-x}$, $y(1) = -2e^{-1}$.

3. Encontre uma equação diferencial de primeira ordem e condições iniciais para os quais a solução $y(x)$ satisfaz

$$x^2 + y^2 = 1.$$

4. Considere a equação diferencial

$$(x^2y^2 - x^2)dy - (4x^3y^2 - 2y^2)dx = 0.$$

    Encontre uma solução em forma implícita $f(x, y) = c, \quad c \in \mathbb{R}$.

5. Considere as equações

    (a) $y' + y^2 \operatorname{sen} x = 0$;

    (b) $y' + \dfrac{2}{3\pi}y^4(\operatorname{sen} x + x\cos x) = 0$.

    Para cada uma das equações responda as seguintes questões:

    i. encontre a solução $\phi_1(x)$ que satisfaz $\phi_1(\pi/2) = 1$;

    ii. encontre a solução $\phi_2(x)$ que satisfaz $\phi_2(\pi/2) = 0$.

iii. Encontre o valor de ϕ_1 e ϕ_2 nos pontos $x = -\pi/2$, $x = 0$ e $x = \pi/4$.

6. Uma solução particular da equação $y' + y = h(x)$ é

$$\phi(x) = \mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{1+x}.$$

   (a) Encontre $h(x)$.
   (b) Encontre a solução geral da equação.
   (c) Encontre a solução ψ que satisfaz $\psi(-2) = 0$. Determine o maior intervalo onde a solução está definida.

7. Resolva a seguinte equação:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\mathrm{e}^y - x}.$$

   Dica: Pense em x como função de y e portanto

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 1/\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

8. Encontre a solução geral da equação diferencial

$$y' - 5y = x^2 e^x - xe^{5x}$$

   utilizando o método de coeficientes indeterminados para achar uma solução particular.

9. Mostre que, se a e λ são números reais positivos e b é um número real qualquer, então todas as soluções da equação:

$$y' + ay = b\mathrm{e}^{-\lambda x},$$

   satisfazem a propriedade

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 0.$$

   Sugestão: considere separadamente os casos $\lambda = a$ e $\lambda \neq a$.

10. Resolva as equações:

   (a) $y' = 2x(1 + 2y)$, $y(2) = 0$;

(b) $y' = 2(1+x)(1+y^2)$, $y(0) = 0$;

11. Considere a equação diferencial

$$y' - 5y = 32t^2 e^t \tag{1}$$

   (a) Determine a solução geral da equação homogênea correspondente.
   (b) Determine a solução geral da equação (1).
   (c) Determine a solução da equação (1) que satisfaz $y(1) = 0$.

12. Considere a equação

$$P' = 2tP + t\mathrm{e}^{t^2}\operatorname{sen}(t).$$

   (a) Encontre a solução geral da equação acima. Não deixe nenhuma conta indicada.
   (b) Encontre a solução que satisfaz $P(\pi) = 0$.
   (c) Encontre a solução que satisfaz

$$\lim_{t\to 0} \frac{P(t)}{t^2} = 0.$$

13. Considere a seguinte equação diferencial :

$$x'(t) = \frac{x - t + 1}{x - t + 5} \tag{2}$$

   (a) Determine a *mudança de variável* que permite re-escrever esta equação como:
$$u' + 1 = \frac{u+1}{u+5}$$
   (b) Resolva esta nova equação diferencial e, então, determine a solução geral da equação original (2).

14. Considere a equação diferencial

$$y' = (\operatorname{sen} t + 1)\, y - e^{\cos t} y^2 \tag{3}$$

   (a) Faça a mudança de variáveis $y = 1/u$ e deduza que a equação diferencial que $u(t)$ satisfaz é linear não homogênea.
   (b) Encontre a solução geral da equação obtida no item anterior (a).

(c) Encontre a solução da equação (3) satisfazendo $y(0) = 1/e$.

(d) Verifique sua resposta fazendo diferenciação.

15. Mostre que para qualquer valor da constante c, a função

$y(t) = \cos(t + c)$ é uma solução da seguinte equação diferencial ordinária:

$$(y')^2 + y^2 = 1$$

(a) Responda sim ou não: É esta uma equação linear, ou, não linear? Justifique.

(b) Encontre uma solução que satisfaz a condição inicial $y(0) = \frac{1}{2}$.

(c) Responda sim ou não: Existe uma outra solução diferente que satisfaz a mesma condição inicial do item anterior? Se a resposta for "sim", encontre-a, e se for "não", justifique.

16. Considere a seguinte equação diferencial

$$y'(x) + \frac{4}{x}y(x) = x^4, \qquad x > 0 \tag{1}$$

(a) Determine a solução geral $y_h(x)$ da equação diferencial homogênea associada à equao (1).

(b) Ache uma solução particular $y_p(x)$ da equação diferencial.

(c) Encontre a solução geral de (1).

(d) Encontre a solução $y(x)$ de (1), satisfazendo $y(1) = \dfrac{10}{9}$.

17. Considere a equação diferencial

$$y' - 5y = -te^{5t} \tag{4}$$

(a) Calcule a solução geral da equação homogênea associada à equação (4).

(b) Encontre uma solução particular da equação diferencial (4).

(c) Calcule a solução da equação (4) satisfazendo à condição inicial $y(1) = \dfrac{e^5}{2}$.

(d) Verifique fazendo correta diferenciação e substituição que a solução encontrada no item anterior (c) é de fato solução da equação (4).

18. Suponha que a temperatura $T(t)$ de uma xícara de café seja governada pela Lei de Resfriamento de Newton:

$$\frac{\mathrm{d}T}{dt} = -k(T - T_a)$$

onde T_a é a temperatura do ambiente. Se a temperatura inicial do café for de 90^o e, após um minuto em um quarto com temperatura ambiente de 25^o, a temperatura é 85^o, determine o instante em que o café atinge a temperatura de 65^o.

19. Suponha que uma gota esférica evapore a uma taxa proporcional à sua área superficial. Se o seu raio inicial era de 3mm e após meia hora, o seu raio é de 2mm, calcule a expressão que dá a o raio da gota para qualquer tempo.

20. Admitamos que a população da Terra cresça a uma taxa proporcional à população presente. Suponha também que em 1650 DC a população era de 600 milhões ($6,0\times10^8$) de pessoas e que em 1950 DC a população era de 3,0 bilhões ($3,0 \times 10^9$).

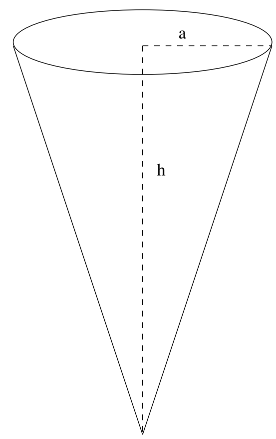
   (a) Encontre uma equação diferencial que modele a situação acima;
   (b) ache uma expressão que dê a população da Terra em qualquer tempo;
   (c) supondo que a população máxima que a Terra pode suportar seja de 24 bilhões ($2,4 \times 10^{10}$), determine quando a Terra estará saturada.

   Você pode usar os seguintes dados:

$$\ln 2 \approx 0.693 \quad \text{e} \quad \ln 5 \approx 1.609.$$

21. Um reservatório cônico de altura h e base a (veja a figura abaixo) recebe um afluxo de água com vazão constante Q. Por outro lado, a água evapora a uma taxa proporcional à área superficial.

   (a) Encontre uma equação diferencial para V que modele a situação.
   (b) Em um certo tempo t_0, o reservatório está cheio e o fluxo de água cessa. Após um dia, o reservatório está com 90% da sua capacidade. Determine o volume $V(t)$, para todo $t \geq t_0$.



Você pode usar os seguintes fatos: o volume do cone de altura h e raio a é $V_{\text{cone}} = \dfrac{\pi a^2 h}{3}$ e a área do círculo de raio a é $A_{\text{círculo}} = \pi a^2$.

22. Seja $F(t, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(t, y) = t^2 y^2 + 2ty^3.$$

e seja $\phi(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $F(t, \phi(t)) = c$, onde c é uma constante.

(a) Encontre uma equação diferencial satisfeita por $\phi(t)$.

(b) Qual a solução da equação encontrada no item (a) que satisfaz $\phi(1) = -1$?

2 Lista de Exercícios Nº 2

[Verifique sua resposta fazendo a corrreta substituição]

1. Resolva as seguintes equações de diferença; encontre a solução em forma fechada se possível.

   (a) $x_{n+1} - (n+1)x_n = 0, \quad x_0 = 2;$

   (b) $x_{n+1} - 3^n x_n = 0, \quad x_0 = 1;$

   (c) $x_{n+1} - \dfrac{n}{n+1} x_n = 0, \quad x_0 = 1;$

   (d) $x_{n+1} = x_n + \mathrm{e}^n, \quad x_0 = 2;$

   (e) $x_{n+1} - (n+1)x_n = 2^n (n+1)!, \quad x_0 = 1.$

2. Ache a solução geral da equação de diferenças:

$$x_{n+1} = (n+1)x_n + (n+1)!.$$

3. Considere a seguinte equação de diferenças não linear de primeira ordem:

$$y_{n+1}(a + by_n) = cy_n$$

   onde a, b, e c são constantes positivas e $y_0 > 0$. Sabemos que $y_n > 0$ para todo n.

   (a) Usando a substituição $y_n = \dfrac{1}{x_n}$, demonstre que a equação de diferenças assume a forma

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$$

   onde α e β são constantes.

   (b) Usando o item anterior, ache a solução da equação de diferenças

$$y_{n+1}(2 + 3y_n) = 4y_n$$

   que satisfaz $y_0 = \frac{1}{2}$.

   (c) Para a solução encontrada no item anterior, qual é o valor limite de y_n quando n tende a infinito.

4. Assuma que a seqüência $x_n = n2^n$ é uma solução da *equação de diferenças*

$$x_{n+1} = ax_n + h_n$$

onde a é uma constante diferente de zero ($a \neq 0$).

(a) Determine o termo não homogêneo h_n.

(b) Ache a solução geral da equação de diferenças determinada pelo item anterior (a).

(c) Encontre a solução x_n para a qual $x_1 = 1$, levando em conta o item (b).

5. Considere a seguinte equações de diferenças

$$x_{n+1} = ax_n + a^{n+1} \tag{5}$$

onde a é uma constante positiva ($a > 0$).

(a) Determine a solução geral x_n da equação de diferenças (5). Verifique que sua resposta dá uma solução da equação (5).

(b) Determine as condições sobre a para que as soluções determinadas no item anterior (a) satisfaçam que o limite

$$\lim_{n\to\infty} x_n$$

existe e seja finito.

(c) Encontre a solução x_n para a qual $x_1 = 1$. Verifique sua resposta.

6. Considere a seguinte equações de diferenças

$$x_{n+1} - 2x_n = n + g_n \tag{6}$$

(a) Determine a solução geral y_n da equação de diferenças homogênea associada à (6).

(b) Determine a seqüência g_n de modo que

$$x_n = -n - 1 + 3^n$$

seja solução da equação (6)

(c) Tomando a seqüência g_n obtida do item anterior, determine a solução geral da equação de diferenças (6).

(d) Tomando a seqüência g_n obtida do item anterior, determine a solução da equação de diferenças (6) que satisfaz à condição $x_0 = 1$.

7. Calcule a seguinte soma:

$$s_n = 5 + 2 \times 5^2 + 3 \times 5^3 + \cdots + n5^n.$$

8. Uma dívida de R$ 12.000,00 deve ser paga em prestações iguais de R$ 380,00 mensais, mais um pagamento parcial final. Se a taxa anual de juros é de 12%, determine os pagamentos necessários para quitar a dívida.

9. Suponha que você pode conseguir uma hipoteca com um prazo de 30 anos para pagar, com juros de 8% ao ano. Quanto voce pode tomar emprestado, se voce pode pagar uma prestação de R$ 1.000,00 reais por mês.

10. Suponha que uma soma constante T é depositada mensalmente num banco que paga uma taxa r de juros por mês. Se A_n denota o montante acumulado, escreva uma equação diferencial para A_n e encontre a solução se $A_0 = 0$, $T = 100$ e $r = 0.02$.

11. No início de janeiro seu saldo bancário é de R$10.000. No final de cada mês você retira uma quantia de T reais. A conta paga juros de 1% ao mês. Quanto deve ser o valor de T para que no início do ano seguinte seu saldo seja R$5.000? Pode usar as aproximações $(1.01)^{11} = 1,116$, $(1.01)^{12} = 1,127$, e $(1.01)^{13} = 1,138$ (nem todas são relevantes).

12. A demanda D_n de um certo produto no mercado é função do seu preço P_n:

$$D_n = 1 - P_n,$$

enquanto a oferta O_n depende do preço esperado E_n:

$$O_n = -1 + 3E_n,$$

com

$$E_{n+1} = E_n + \eta(P_n - E_n,)$$

onde $0 < \eta \leq 1$.

(a) Obtenha a equação de diferenças de primeira ordem que governa o preço P_n, de modo a haver equilíbrio (igualdade) entre oferta e demanda no ano n.

(b) Ache a solução geral desta equação.

(c) Determine a condição a ser satisfeita por η para que a solução seja convergente ($\lim_{n\to\infty} P_n$ existir e ser finito).

13. Escreva um equação de diferenças que descreva o número de regiões criadas por n retas no plano, dado que cada par de reta deve se encontrar, e que num ponto no máximo duas retas se interceptam. Resolva a equação e encontre o número das regiões como função de n.

14. Suponha que você possa pegar um empréstimo com juros de 10% ao ano e tenha que pagá-lo em 12 meses começando em janeiro. Suponha também que você receberá um bônus de Natal de R$ 2.000,00, o qual você vai usar para ajudar a quitar a dívida, e que você pode pagar uma prestação de R$ 300,00.

    (a) Escreva uma equação de diferenças que modele a situação;

    (b) resolva a equação encontrada no item (a);

    (c) encontre o valor que voce pode tomar emprestado;

    (d) repita os itens acima se o bônus for recebido em junho.

    Você pode usar o seguinte fato:

    $$(1.1)^{1/12} \approx 1.008.$$

15. Defina a função

    $$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t, \qquad x > 0.$$

    Mostre que

    (a) $\Gamma(1) = 1$ e $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$;

    (b) Se n é um inteiro positivo, então $\Gamma(n+1) = n!$;

3 Lista de Exercícios Nº 3

[Verifique sua resposta usando corretamente uma calculadora quando possível]

1. Para cada um dos problemas de valor inicial (PVI) i e ii, faça os seguintes itens:
   (a) escreva a iteração de Euler;
   (b) calcule a solução do PVI em $x = 0,1;0,2;0,3,0,4$ usando $h = 0.1$;
   (c) repita o item (b) usando $h = 0.05$ e compare as duas aproximações;
   (d) ache a solução exata $y = \phi(t)$ e compare com as aproximações obtidas nos itens (b) e (c).
      i. $y' = 2y - 1$, $y(0) = 1$;
      ii. $y' = 1/2 - x + 2y$, $y(0) = 1$.

2. Encontre uma fórmula para o erro local do método de Euler em termos da solução exata ϕ e de t para cada uma das equações abaixo:
   (a) $y' = t^2 + y^2$;
   (b) $y' = \sqrt{t + y}$;
   (c) $y' = 2t + \mathrm{e}^{-y}$.

3. Considere o problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} y' = t^2(\cos(y) + y), \\ y(1) = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

   (a) Escreva explicitamente a iteração de Euler para o PVI acima.
   (b) Escreva explicitamente a iteração de Heun para o PVI acima.
   (c) Usando o método de Heun, estime o valor de $y(3)$ usando dois passos iguais. As operações transcendentais que não tiverem uma simplificação imediata podem ser deixadas indicadas.

4. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' & = & (1-y)^2 + 1, \\ y(0) & = & 1. \end{cases}$$

   (a) Encontre a iteração de Euler para o problema acima.
   (b) Encontre a iteração de Heun para o problema acima.

(c) Calcule uma aproximação de $y(4)$ usando o método de Heun com dois passos iguais.

5. Usando o método de Heun, calcule aproximações para as soluções dos problemas de valor inicial abaixo em $x = x_0 + 0.2$ (onde x_0 é o ponto inicial); use $h = 0.1$ e $h = 0.05$, e compare as aproximações obtidas.

   (a) $y' = 2y - 1$, $y(0) = 1$;

   (b) $y' = t^2 + y^2$, $y(0) = 1$;

   (c) $y' = \sqrt{t + y}$, $y(1) = 3$;

   (d) $y' = (t^2 - y^2)\operatorname{sen} y$, $y(0) = -1$.

6. Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$y' = t + y - 3, \quad y(0) = 2.$$

   (a) Mostre que a solução exata é $\phi_1(t) = 2 - t$;

   (b) encontre a solução $\phi_2(t)$, se a condição inicial for $y(0) = 2,001$;

   (c) calcule

$$\lim_{t\to\infty} \phi_2(t) - \phi_1(t),$$

   e discuta o resultado em termos de possíveis erros nas condições iniciais.

7. Considere o problema de valor inicial (PVI) dado abaixo:

$$\begin{cases} y' = yt, \\ y(0) = a. \end{cases}$$

   (a) Escreva explicitamente a iteração de Heun para o PVI acima.

   (b) Calcule $y(2)$ usando apenas 1 passo.

   (c) Calcule $y(2)$ usando 2 passos iguais.

   (d) Sabendo que a solução exata do problema acima revela que $y(2)$ vale aproximadamente $7,39\,a$, determine a razão entre os erros produzidos nos itens (7b) e (7c). Comente o resultado.

8. Considere a equação diferencial $y' = \dfrac{y^2}{x^2}$ definida para $x \neq 0$.

   (a) Seja $y(x) = ax + b$. Ache os possíveis valores de a e b para os quais $y(x)$ é uma solução da equação diferencial.

(b) Ache a solução exata da equação diferencial que satisfaz $y(1) = 1$.

(c) Aplique o método de Euler no intervalo de 1 a $1,5$ para obter uma solução aproximada do problema de valor inicial $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ usando três iterações. Compare os valores de y_n, $n = 1, 2, 3$ com os valores $y(x_n)$ da *solução exata* do problema.

9. Dado um número real não nulo r, considere a equação diferencial

$$x'(t) = rx \tag{7}$$

satisfazendo $x(0) = x_0$.

(a) Aplique o método de Euler com passo $h = \dfrac{1}{n}$, e escreva a n-ésima iteração x_n em função de r, x_0 e n.

(b) Usando obrigatoriamente o item (a), bem como o fato que o método de Euler converge a uma solução da equação acima quando $h \to 0$, calcule

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

10. Considere o problema com valor inicial

(4)

$$\begin{aligned} y'(t) &= 2t + y \\ y(0) &= a \end{aligned}$$

(a) Escreva explicitamente a iteração de Euler, calculando o valor aproximado de $y(1)$ em função de a, usando duas iterações com passos iguais.

(b) Escreva explicitamente a iteração de Heun. Para $a = 1$, use o método de Heun para estimar o valor de $y(0,2)$, usando uma única iteração.

4 Lista de Exercícios Nº 4

[Verifique sua resposta fazendo correta substituição e diferenciação]

1. Considere a seguinte equação diferencial

$$y'' + y' - 2y = -6e^{-2x}$$

   (a) Determine a solução geral $y_h(x)$ da equação diferencial homogênea associada.

   (b) Ache uma solução particular $y_p(x)$ da equação diferencial.

   (c) Encontre a solução $y(x)$ para a qual $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$.

   (d) Verifique por diferenciação direta os resultados obtidos nos itens anteriores.

2. Encontre a solução geral:

   (a) $y'' + 2y' - 3y = 0$;

   (b) $y'' + 5y' = 0$;

   (c) $4y'' - 9y = 0$.

3. Encontre α, tal que a solução do problema de valor inicial (PVI)

$$y'' - y' - 2y = 0, \quad y(0) = \alpha \quad \text{e} \quad y'(0) = 2,$$

   satisfaça

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

4. Encontre $\lambda > 0$ tal que a solução do PVI

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0 \quad \text{e} \quad y'(0) = 1,$$

   satisfaça $y(\pi) = 0$.

   O que acontece se $y'(0) = \alpha$, $\alpha \neq 0$? Discuta quais são as condições relevantes do problema. Qual a relação entre esse problema e autovalores em Álgebra Linear?

5. A equação diferencial $y'' + (3 - \alpha)y' - 2(\alpha - 1)y = 0$ tem como solução geral a função $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$.

(a) Determine os valores de α, se estes existirem, para os quais **todas** as soluções tendem a zero quando $t \to \infty$.

(b) Determine os valores de α, se estes existirem, para os quais **todas** as soluções não nulas tendem a infinito quando $t \to \infty$.

(c) Se $\alpha = 4$, $y(0) = a$ e $y'(0) = b$, sendo a e b constantes, determine a relação entre a e b para a qual $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$

6. Suponha que a posição de uma partícula em movimento unidimensional seja governada pela equação

$$x'' + 2x' + x = 0, \qquad \text{(P)}$$

onde $x(t)$ é a posição da partícula em relação a origem no tempo t.

(a) Se em $t = 0$, a partícula está na posição x_0 e tem velocidade v_0, encontre as condições iniciais para $x(t)$ que descrevem essa situação e resolva a equação (P) com essas condições.

(b) Mostre que $x = 0$ é um ponto de equilíbrio para a partícula, i.e, mostre que se $x_0 = 0$ e $v_0 = 0$ então a partícula sempre permanece na origem.

(c) Mostre que para quaisquer valores de x_0 e v_0 a partícula passa pela origem no máximo uma vez.

7. Considere a equação diferencial

$$y'' + 2y' - 8y = 0.$$

(a) Encontre a solução geral;

(b) encontre a solução $\phi_1(t)$ que satisfaz $\phi_1(0) = 1$ e $\phi_1'(0) = 0$;

(c) encontre a solução $\phi_2(t)$ que satisfaz $\phi_2(0) = \pi$ e $\lim\limits_{t\to\infty} \phi_2(t) = 0$.

8. Determine pelo método de coeficientes indeterminados a solução geral de:

$$y'' + \lambda^2 y = \sum_{m=1}^{n} a_m \operatorname{sen} m\pi t$$

onde $\lambda > 0$ e $\lambda \neq m\pi$, com $m = 1, \ldots, n$.

9. Considere a seguinte equação diferencial:

$$y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = te^{-t} \tag{8}$$

(a) Encontre a solução geral da equação homogênea correspondente.

(b) Usando obrigatoriamente o método de coeficientes indeterminados, encontre uma solução particular da equação (8).

(c) Encontre a solução da equação (8) com condições iniciais $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

10. Considere a equação diferencial

$$y'' + \alpha y' + \beta y = g(t),$$

onde α e β são números reais. Sabe-se que $u(t) = t\mathrm{e}^{-t}$ e $v(t) = 2\mathrm{e}^{-t}$ são duas soluções da equação **homogênea**. Sabe-se também que $y(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t^2}$ é uma solução da equação não-homogênea.

(a) Encontre uma solução $\phi(t)$ da equação homogênea tal que $\phi(0) = 1$ e $\phi'(0) = 2$.

(b) Ache uma solução da equação não-homogênea que satisfaz

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{t} y(t) = 0.$$

11. Usando obrigatoriamente o método da variação de parâmetro, determine a solução geral da seguinte equação diferencial:

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t^2}.$$

12. Considere a equação diferencial

$$y'' - 2y' + y = t^2 + 1$$

(a) Ache a solução geral da equação.

(b) Ache a solução que satisfaz $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$

13. Considere a seguinte equação diferencial

$$y'' + y' - 6y = -5e^{-3x} \tag{1}$$

(a) Determine a solução geral $y_h(x)$ da equação diferencial homogênea associada à equação (1).

(b) Ache uma solução particular $y_p(x)$ da equação diferencial (1).

(c) Encontre a solução $y(x)$ de (1) para a qual $y(0) = 0$ e $y'(0) = -4$.

14. Considere a seguinte equação diferencial onde a é uma constante positiva ($a > 0$)

$$4y'' + 4(1-a)y' - (2a-1)y = 0 \tag{3}$$

(a) Encontre a solução geral da equação (3).

(b) Ache os valores de a, caso existirem, para os quais todas as soluções tendem a *zero* quando $t \to \infty$.

(c) Seja c um número real não nulo fixado ($c \neq 0$). Encontre todos os valores de a para que a equação

$$4y'' + 4(1-a)y' - (2a-1)y = c$$

sempre tenha uma solução $y = k$ (constante). Para tais valores calcule k em função de a, c.

15. Suponha que a densidade da água seja igual a um e considere um bloco de material de densidade $\rho < 1$, com aresta l. Lembre-se que a força agindo sobre o bloco parcialmente submerso é igual a diferença do peso do bloco e o peso da água deslocada.

(a) Encontre a posição de equilíbrio do bloco (use o princípio que o peso do bloco é igual ao peso da agua deslocada).

(b) Se o bloco for deslocado levemente da posição de equilíbrio, ele começará a oscilar em torno desse equilíbrio. Encontre uma equação diferencial que modele estas oscilações, assumindo que efeitos viscosos são desprezáveis.

(c) Usando a resposta do item (b) encontre a frequência dessas oscilações.

(d) Suponha agora que é exercida uma força externa senoidal sobre o bloco. Determine uma equação diferencial que modele esse caso e encontre a frequência da força que dá uma resposta ressonante.

16. Considere a equação diferencial

$$mu'' + ku = F(t), \qquad F(t) = \sum_{n=0}^{N_1} a_n \text{sen}\,(nt) + \sum_{n=0}^{N_2} b_n \cos(nt),$$

onde k e m são reais positivos e a_n e b_n números reais.

(a) Encontre a solução puramente forçada da equação (i.e. u(0)=0, u'(0)=0). Certifique-se que considerou todas as possibilidades.

(b) Repita o item (a) para a equação $mu'' + \gamma u' + ku = F(t)$, onde $F(t)$ é o mesmo dado acima e $\gamma^2 < 4km$. Qual o comportamento da solução para $t \to \infty$?

(c) Repita o item (b), com $F(t) = \cos(\omega t)$. Determine para que valor de ω a amplitude da resposta permanente é máxima.

17. Resolva as seguintes equações diferenças

(a) $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 14x_n = 0, \qquad x_0 = 1\, x_1 = 0;$

(b) $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \quad L_0 = 2,\, L_1 = 1;$

(c) $x_{n+2} - 16x_n = 0 \quad , x_0 = a,\, x_1 = b;$

(d) $x_{n+2} + 16x_n = 0 \quad , x_0 = a,\, x_1 = b;$

18. Consider o sistema:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= y_n \\ y_{n+1} &= 2y_n - x_n + a \end{aligned}$$

onde a é uma constante.

(a) Transforme este sistema em uma única equação de diferenças de 2ª ordem na variável y. [Sugestão: veja quanto vale y_{n+2}.]

(b) Para que valores de a esta equação apresenta solução constante.

(c) Para os valores de a encontrados no item anterior, determine uma solução não constante.

19. Considere a equação de diferenças linear

$$n(n+1)y_{n+2} - 2n(n+2)y_{n+1} + (n+1)(n+2)y_n = 4 \qquad (*)$$

(a) Ache a solução constante, isto é $y_n = c \in \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$

(b) Tome $y_n = nz_n$ e deduza que se y_n satisfaz a equação homogênea associada, então z_n satisfaz a uma equação de diferenças linear de segunda ordem *com coeficientes constantes*. Em seguida, determine a forma mais geral de z_n.

(c) Escreva a solução geral da equação linear não homogênea $(*)$.

20. Considere a equação de diferenças:

$$x_{n+2} + ax_{n+1} - x_n = L$$

   (a) Determine os valores de a para os quais existe uma solução constante desta equação, e encontre a tal solução.

   (b) Encontre a solução geral desta equação para os valores de a do item anterior.

   (c) Encontre uma solução particular desta equação par um valor de a para o qual não existe uma solução constante.

21. Considere a seguinte equação de diferenças:

$$y_{n+2} = 3/2y_{n+1} + y_n. \tag{9}$$

   (a) Calcule a solução geral de (9)

   (b) Considere, para a equação (9), as seguintes condições iniciais:

$$y_0 = 1, \quad y_1 = \alpha.$$

   Ache α para que

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

22. Considere a seguinte equação de diferenças:

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + ax_n = n$$

   (a) Determine o valor da constante a de modo que 3^n seja uma possível solução do caso homogêneo.

   (b) Par o valor de a encontrado no item anterior, determine a solução geral do caso homogêneo.

   (c) Ache uma solução particular qualquer em função da constante a. O que acontece quando $a = 1$?

23. Considere a equação de diferenças $x_{n+2} - x_n = K$ onde K é uma constante.

   (a) Ache a solução geral da equação homogênea correspondente.

   (b) Ache uma solução para o caso $K \neq 0$ e que satisfaz $x_0 = 0$ e $x_1 = 0$.

24. O produto interno de um país é a soma do consumo interno, do investimento privado e dos gastos do governo. As hipóteses abaixo são consideradas clássicas pelos economistas:

   - o consumo interno é proporcional ao produto interno do ano anterior.
   - o investimento privado é proporcional ao aumento de consumo.
   - os gastos governamentais são constantes ao longo dos anos e, sem perda de generalidade, podem ser considerados iguais a 1.

   (a) Seja $P(n)$, $C(n)$ e $I(n)$ o produto interno, o consumo e o investimento, respectivamente, no ano n. Encontre uma equação de diferenças que modele a situação.

   (b) Determine os pontos de equilíbrio da equação encontrada no item (a);

   (c) Usando a solução encontrada no item (c) tente determinar em que condições os equilíbrios encontrados no item (b) são estáveis. Quando a solução oscilará em torno desses equilíbrios?

25. Um modelo clássico para criação de coelhos assume que um casal de coelhos com 2 meses, ou mais, de idade dá origem a um novo casal de coelhos por mês. Denote por $F(n)$ o número de pares coelhos ao final do mês n.

   (a) Encontre uma equação de diferenças para $F(n)$;

   (b) Resolva a equação encontrada no item (a) usando condições adequadas para o modelo;

   (c) Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{F(n+1)}{F(n)}$.

26. Um apostador participa de uma sequência de jogos com um adversário. Se o apostador ganha um jogo, ele recebe R$1,00, caso contrário ele perde R$1,00. A probabilidade de que o apostador ganhe um jogo é q. O apostador continua jogando até ele conseguir acumular uma quantia de N reais ou ele ir a falência. O capital inicial do apostador é R$1,00 (tempos de crise).

   (a) Seja $p(n)$ a probabilidade do jogador ir a falência se ele tem um capital de n reais. Encontre uma equação de diferenças para $p(n)$. Note que a equação vai depender de N e q.

(b) Resolva a equação encontrada no item (a). Considere os casos $q = 1/2$ e $q \neq 1/2$ separadamente.

(c) Calcule $\lim_{N \to \infty} p(n)$.

27. Mensagens telegráficas são transmitidas usando pontos e traços. Suponha que um dado sistema de telégrafo leve um segundo para transmitir um ponto e dois segundos para transmitir um traço. Seja $M(n)$ o número de mensagens diferentes que podem ser transmitidas em n segundos. Por exemplo $M(3) = 3$, pois só podemos ter **...**, **-.**, **.-** ;

    (a) Encontre uma equação de diferenças para $M(n)$. Observe que uma mensagem deve terminar em **.** ou em **-**. No primeiro caso, a parte inicial da mensagem foi transmitida em $n - 1$ segundos e, portanto, podem existir $M(n - 1)$ começos diferentes. No segundo caso, a parte inicial da mensagem foi transmitida em $n - 2$ segundos e, portanto, podem existir $M(n-2)$ começos diferentes. Quais são os valores apropriados para as condições iniciais $M(0)$ e $M(1)$?

    (b) Resolva a equação encontrada no item (a), usando as condições iniciais apropriadas.

5 Lista de Exercícios N$^{\underline{o}}$ 5

1. Calcule as transformadas de Laplace

   (a) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ (t-2)^2, & t \geq 2 \end{cases}$

   (b) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < \pi \\ t - \pi, & \pi \geq t \leq 2\pi \\ 0, & t > 2\pi \end{cases}$

   (c) $f(t) = t - u_1(t)(t-1), \quad t \geq 0.$

2. Resolva os problemas de valor inicial

   (a) $y'' + y = f(t), \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$ e $f(t) = \begin{cases} 1, & t < \pi/2 \\ 0, & t \geq \pi/2 \end{cases}$

   (b) $y'' + 4y = \text{sen}\, t - u_2(t)\text{sen}\,(t - 2\pi), \qquad y(0) = 0 \quad \text{e} \quad y'(0) = 0.$

   (c) $y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi), \qquad y(0) = 1 \quad \text{e} \quad y'(0) = 0.$

   (d) $y'' + \omega^2 y = \delta(t - \pi/\omega), \qquad y(0) = 0 \quad \text{e} \quad y'(0) = 1.$

   (e) $y'' + 2y' + 2y = \cos t + \delta(t - \pi/2), \qquad y(0) = 0 \quad \text{e} \quad y'(0) = 0.$

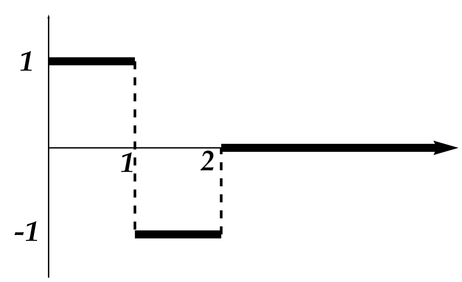
3. Usando Transformada de Laplace, determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' - 2y = 2e^{-2t}, & t \geq 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

4. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} y'' - 4y &= g(t) \\ y(0) = y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

   onde a função $g(t)$ é da forma:



(a) Encontre a transformada de Laplace de $g(t)$.

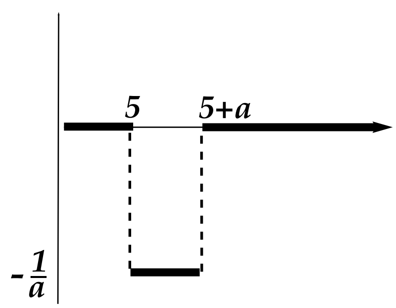
(b) Resolva o problema de valor inicial acima.

OBS: Você pode achar útil o seguinte resultado: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

5. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 6y(t) &= g(t) \\ y(0) = \frac{d}{dt} y(0) &= 0 \end{aligned}$$

onde a função $g(t)$ é da forma:



(a) Resolva o problema de valor inicial acima.

(b) Determine $\lim_{a \to 0} y(6)$.

6. Considere a equação

$$y'' + \alpha y' + \beta y = g(t), \qquad y(0) = a \quad \text{e} \quad y'(0) = b.$$

Seja $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ e $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$.

(a) Encontre a equação para $Y(s)$.

(b) Encontre a inversa de $Y(s)$, quando $G(s) \equiv 0$.

(c) Encontre a inversa no caso geral; escreva a solução como a soma de duas partes: a solução da homogênea e uma solução particular da não-homogênea.

(d) Usando o teorema de convolução, escreva a solução particular da não-homogênea em termos de $g(t)$ e das soluções da homogênea.

(e) Relacione a resposta obtida no item anterior com a fórmula de variação de parâmetros.

7. (a) Calcule $w(t)$ a transformada de Laplace inversa de

$$W(s) = \frac{e^{-2s}}{s(s^2-1)}$$

   (b) Ache a solução da equação $y'' - y = u_2(t)$ que satisfaz $y(0) = 0$ e $\lim_{t\to\infty} y(t) = -1$

8. Considere um sistema massa-mola, de massa m e constante elástica k. Responda às seguintes perguntas:

   (a) Encontre uma equação diferencial para a posição da massa que modele o movimento a partir de condições iniciais gerais;

   (b) encontre a equação que modela o sistema, no caso do mesmo sofre uma força externa da forma $F(t) = F_0 \cos(\omega_0 t)$;

   (c) resolva a equação encontrada no item (b), quando $\omega = \sqrt{k/m}$ é diferente de ω_0;

   (d) interprete a solução encontrada no item (c), quando $|\omega - \omega_0|$ for pequeno;

   (e) resolva a equação do item (b), quando $\omega = \omega_0$, e interprete o resultado.

9. Seja f uma função que satisfaz $f(t+T) = f(t)$ para algum número $T > 0$; f é dita uma função periódica com período T.

   (a) Mostre que

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \frac{\int_0^T \mathrm{e}^{-st} f(t)dt}{1 - e^{-sT}}.$$

   (b) Use o resultado do item anterior para calcular a transformada de Laplace das seguintes funções:

      i. $f(t) = \begin{cases} 1, & t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 2 \end{cases}$
      e $f(t+2) = f(t)$.

      ii. $f(t) = t$, $0 \leq t < 1$ e $f(t+1) = f(t)$.

      iii. $f(t) = \text{sen } t$, $0 \leq t < \pi$ e $f(t+\pi) = f(t)$.

10. Ache a transformada de Laplace inversa, pelo teorema de convolução

(a) $F(s) = \dfrac{1}{(s+1)^2(s^2+4)}$;

(b) $F(s) = \dfrac{G(s)}{s^2+1}$.

11. Neste item temos a finalidade de examinar a aplicação eficiente da transformada de Laplace para resolver equações diferenciais. Em geral, considere

$$y''(t) + 4y(t) = g(t)$$

satisfazendo alguma condição inicial $y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = y_0'$. Usando transformada de Laplace pode-se calcular uma solução particular $y_p(t)$ da equação, por exemplo, uma solução satisfazendo às condições iniciais $y(t_0) = 0$ e $y'(t_0) = 0$. Note que para isto será necessário usar a tabela para calcular $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{G(s)}{s^2+4}\right)$, onde $G(s)$ é a transformada de Laplace de $g(t)$. Em seguida, sabendo que a solução geral da equação é da forma $y(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) + y_p(t)$, usa-se as condições iniciais para determinar c_1 e c_2.

(a) Resolva

$$y''(t) + 4y(t) = \delta(t-\varepsilon), \qquad t \geqslant 0, \quad \text{e} \quad 0 < \varepsilon << 1$$

12. Utilizando a transformada de Laplace, determine a solução $y(t)$ do seguinte problema de valor inicial de *primeira* ordem:

$$\begin{aligned} y'(t) + y(t) &= -u_4(t) + \delta(t-6) \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

onde $u_c(t)$ e $\delta(t)$ representam, respectivamente, as funções *degrau unitário* e *impulso unitário*.

13. (a) Usando a formula de convolução, calcule a transformada de Laplace inversa $y(t)$ de

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{s^2+1}\frac{1}{s^2+1}.$$

Dê a resposta calculando todas as integrais.

[Dica: Poderia achar útil a identidade: $2\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$]

(b) A função $y(t)$ encontrada no item anterior é solução de uma equação diferencial de segunda ordem $y''(t) + ay'(t) + by(t) = \operatorname{sen} t$. Encontre os constantes a e b.

14. Seja $y(t)$ a solução da equação diferencial

$$ty''(t) + y'(t) + ty(t) = 0$$

satisfazendo $y(0) = 1$. Encontre $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$ sabendo que $\lim_{s\to\infty} sY(s) = 1$. [Dica: Use a formula $L(tf(t)) = -\frac{d}{ds}L(f(t)) = -\frac{d}{ds}F(s)$]

(a) Calcule

$$F(s) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t}\right)$$

sabendo que $\lim_{s\to\infty} = 0$. [Dica: Use a formula $\mathcal{L}(tf(t)) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(f(t)) = -\frac{d}{ds}F(s)$]

15. Sejam a, b, c números reais dados. Seja $h(t)$ uma função dada. Assuma que $y = f(t)$, $f(0) = 0$ seja uma solução da seguinte equação diferencial

$$ay'(t) + by(t) + \int_0^t y(u)\,du - c = h(t)$$

(a) Calcule $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$ a transformada de Laplace de $y = f(t)$ em termos de a, b, c e da transformada de Laplace de $h(t)$. *Sugestão*: Use o teorema fundamental do cálculo, e um resultado básico de transformadas de Laplace para relacionar as transformada de Laplace de $f(t)$ e de $\int_0^t f(u)\,du - c$.

(b) Considere o seguinte problema com valor inicial (OBS: Este item pode ser feito independente do item (a))

$$(2) \begin{cases} 2\,y'(t) + 200\,y(t) + 50\,000\,z(t) = 0 \\ \text{onde} \\ y(0) = 0 \\ \text{e} \\ z(t) = \int_0^t y(u)\,du + 10^{-6} \end{cases}$$

Calcule a transformada de Laplace de $y(t)$.

(c) Encontre a solução $y(t)$ do problema com valor inicial (2).

16. Considere a equação diferencial de segunda ordem

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = f(t) \tag{10}$$

Seja $F(s)$ a transformada de Laplace de $f(t)$.

(a) Calcule a transformada de Laplace $Y(s)$ da solução $y(t)$ de (10) que satisfaz às condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = a$. Note que $Y(s)$ deve ser calculada em termos de $F(s)$ e da constante a.

(b) Encontre a solução geral da equação (10) que satisfaz às condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = a$ quando $f(t) \equiv 0$.

(c) Resolva o problema com valor inicial relativo à equação (10), quando $y(0) = y'(0) = 0$ e

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 2 \\ t - 2 & \text{para } t \geqslant 2 \end{cases}$$

6 Lista de Exercícios Nº 6

17. Determine o raio de convergência

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(x-3)^n$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$;

18. Determine a série de Taylor em torno do x_0 dado e determine o raio de convergência da série.

(a) sen x, $\quad x_0 = 0$;

(b) $\log x, \qquad x_0 = 1;$

(c) $\dfrac{1}{1+x}, \qquad x_0 = 0.$

19. Resolva a equação diferencial dada através de séries de potências: ache a relação de recorrência e calcule os quatro primeiros termos, não nulos, da respectiva série.

    (a) $y'' - xy' - y = 0, \qquad y(0) = 1 \quad \text{e} \quad y'(0) = 2;$

    (b) $(1-x)y'' + y = 0, \qquad y(0) = 3 \quad \text{e} \quad y'(0) = 1;$

    (c) $(1+x^2)y'' - 4xy' + 6y = 0, \qquad y(0) = -1 \quad \text{e} \quad y'(0) = 1.$

20. Considere a equação de Tchebyshev:

$$(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0.$$

    (a) Determine duas soluções (que não sejam múltiplas uma da outra), em séries de potências em x para $|x| < 1$;

    (b) Mostre que se α for um inteiro n, $\quad n > 0$. Então uma das duas soluções é um polinômio de grau n. Esses polinômios, a menos de uma condição de normalização, são os polinômios de Tchebyshev, T_n.

    (c) Encontre T_i, para $i = 0, 1, 2$.

21. Encontre os 3 primeiros termos da solução em geral em série de potências da equação

$$\mathrm{e}^x y'' + xy = 0.$$

22. Considere a série de potências

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

Assuma que os coeficientes $a_n, n \geqslant 1$ satisfazem a equação de diferenças

$$a_n = \frac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2}$$

com $a_1 = 0$ e $a_2 = 1$.

    (a) Encontre uma fórmula para os coeficientes a_n, em função de n.

    (b) Calcule o raio de convergência da série.

(c) Calcule $f^{(500)}(0)$ (derivada de ordem 500 de $f(x)$ em 0)

23. Considere a equação diferencial de segunda ordem

$$(1-x)y'' + \alpha y = 0$$

onde α é um número real.

(a) Sabe-se que há uma solução em séries de potências em torno do ponto 0 cujos primeiros cinco termos são:

$$y(x) = 1 + 0 \cdot x - x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 0 \cdot x^4 + \cdots .$$

Ache a constante α [Dica: considere o valor de $y''(0)$].

(b) Para o valor de α encontrado no primeiro item, ache os primeiros cinco termos de uma séries de potências em torno do ponto 0 de uma solução linearmente independente da dada.

24. Considere a série de potências

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Assuma que os coeficientes $a_n, n \geqslant 0$ satisfazem a equação de diferenças

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$$

com $a_0 = 1$ e $a_1 = 1$.

(a) Encontre uma fórmula para os coeficientes a_n, em função de n.

(b) Calcule o raio de convergência da série.

(c) Calcule $f^{(100)}(0)$ (derivada de ordem 100 de $f(x)$ em 0).

25. Considere a equação diferencial

$$xy''(x) - y'(x) + y(x) = x^2$$

(a) Encontre os 4 primeiros termos da série de potências em torno de $x_0 = 1$ da solução única que satisfaz $y(1) = a$ e $y'(1) = b$. Note que sua resposta deve ser dada em termos das constantes a e b.

(b) Assumindo que existe uma solução da equação que admite um desenvolvimento em série de potências em torno da origem $x_0 = 0$, encontre a lei de recorrência satisfeita pelos coeficientes da série.

(c) Calcule o raio de convergência da série obtida no item anterior.

26. Considere a equação de Legendre

$$(1-t^2)y'' - 2ty' + \alpha(\alpha+1)y = 0.$$

(a) Mostre que é suficiente considerar $\alpha > -1$.

(b) Sejam y_1 e y_2 soluções da equação de Legendre que satisfazem $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$, $y_2(0) = 0$ e $y_2'(0) = 1$. Encontre o desenvolvimento em série de y_1 e y_2.

(c) Mostre que se $\alpha = 2k$, onde k é um natural, então a solução y_1 é um polinômio de grau $2k$, que só tem potências pares de t. Mostre também que se $\alpha = 2k+1$ (k natural), então a solução y_2 é um polinômio de grau $2k+1$, que só tem potências ímpares de t.

(d) O polinômio de Legendre $P_n(t)$ é definido como a solução polinomial da equação de Legendre, quando α é um natural. Determine os primeiros 5 polinômios de Legendre.

(e) Mostre que a equação de Legendre pode ser escrita como

$$\left[(1-t^2)y'\right]' = -\alpha(\alpha+1)y.$$

(f) Usando o item anterior mostre que se $n \neq m$, então

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)P_m(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Quando $n = m$ é possível mostrar que a integral vale $2/(2n+1)$.

(g) Seja f um polinômio de grau n. É possível mostrar que podemos escrever

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(t).$$

Use o resultado do item anterior para encontrar os uma fórmula em termos de f para os coeficientes a_k.

27. Considere o problema de primeira ordem com condição inicial:

$$(*) \qquad \begin{cases} y'(x) + 2xy(x) = x^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Assuma que existe uma solução de (*) dada por uma série de potências em torno de $x_0 = 0$.

(a) Calcule os 4 primeiros coeficientes da série.

(b) Encontre uma *relação de recorrência* entre os coeficientes, digamos a_n, da série para $n \geq 3$.

28. Considere a equação diferencial

$$(1 - x^2)y'' + 2y = 0$$

com condições inicias $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Suponha a solução é dada por uma série de potências $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

(a) Encontre uma relação de recorrência entre os coeficientes

(b) Encontre os primeiros cinco coeficientes.

7 Lista de Exercícios Nº 7

1. Considere o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2x + y + 2 + t \\ y'(t) &= x + 2y + 1 + t \end{aligned} \tag{11}$$

   (a) Determine a solução geral $Y_h(t)$ do sistema de equações diferenciais homogêneo associado.

   (b) Ache uma solução particular $Y_p(t)$ do sistema de equações diferenciais (não homogêneo).

   (c) Encontre a solução (única) $Y(t)$ para a qual $Y(0) = (-1/9, -10/9)$.

2. Considere o seguinte sistema diferencial

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2x + y + z + 2 + t \\ y'(t) &= x + 2y + z + 1 + t \\ z'(t) &= x + y + 2z + 2t \end{aligned} \tag{12}$$

   (a) Determine a solução geral $Y_h(t)$ do sistema diferencial homogêneo associado.

   (b) Ache uma solução particular $Y_p(t)$ do sistema diferencial.

   (c) Encontre a solução $Y(t)$ para a qual $Y(0) = (0, -1, 0)$

3. Considere o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2x - y - 10e^{-t} \\ y'(t) &= x + 2y - 5 \end{aligned} \tag{13}$$

   (a) Determine a solução geral $Y_h(t)$ do sistema diferencial homogêneo associado.

   (b) Ache uma solução particular $Y_p(t)$ do sistema de equações diferenciais (13) da forma

$$Y_p = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

(c) Encontre a solução única $Y(t)$ para a qual $Y(0) = (1, -1)$.

4. Para cada uma das matrizes M abaixo, calcule e^A, e^{tA}, A^n e sen A.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. Considerando a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 8 \end{pmatrix},$$

calcule a matriz

$$\cos\left\{\frac{\pi}{28}(29I - A)\right\}.$$

6. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Calcule $\cos(\pi A)$, em função de a, b e c.

(b) Determine os valores a, b e c de modo que

$$\cos(\pi A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & * \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde $* \in \mathbb{R}$.

(c) Determine os auto-valores da matriz $(\cos(\pi A))^n, \quad n \in \mathbb{N}$.

7. Considere o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned} x'(t) &= -4x + 2y + 5 + 2t \\ y'(t) &= -x - y + 2 + 2t \end{aligned} \tag{14}$$

(a) Determine a solução geral $X_h(t)$ do sistema de equações diferenciais homogêneo associado à (14).

(b) Ache uma solução particular $X_p(t)$ do sistema de equações diferenciais (não homogêneo) (14).

(c) Encontre a solução (única) $X(t)$ de (14) para a qual $X(0) = (1, 0)$.

(d) Verifique, fazendo a devida substituição e adequada diferenciação, que a sua solução do item (c) (acima) é de fato solução de (14).

8. Considere a seguinte equação diferencial

$$x'''(t) + ax''(t) + bx'(t) = g(t) \tag{15}$$

onde a, b são constantes reais, $g(t)$ é dado (veja item (c)) e $x(t)$ é a variável dependente (incógnita).

(a) Determine um sistema de equações diferenciais de primeira ordem equivalente, colocando-o na forma matricial.

(b) Suponha que as funções $x_1(t) = e^{-2t}$ e $x_2(t) = e^{-3t}$ sejam soluções da *equação homogênea associada* à equação (15). Calcule a e b.

(c) Assumindo que $g(t) := \operatorname{sen} t + \cos t$, determine uma solução particular da equação (15).

(d) Assumindo que $g(t) := \operatorname{sen} t + \cos t$, determine a solução geral da equação (15).

9. Considere os seguintes sistemas de equações diferenciais

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} X(t) \tag{16}$$

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

(a) Resolva o problema com valor inicial relativo ao sistema (16) com $X(0) = (a, b)$. Sua resposta deve ser dada em função de a, b.

(b) Seja $X(t)$ a solução obtida no item (a). Encontre a condição geral sobre a, b de modo que $X(t) \to 0$ (quando $t \to \infty$).

(c) Encontre os pontos de equilíbrio do sistema (17).

(d) Encontre a solução geral do sistema (17).

10. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcule $A^{1/2}$;

(b) verifique que $A^{1/2} \times A^{1/2} = A$.

11. Resolva os seguintes sistemas diferenciais:

(a) $Y' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ t \end{pmatrix}$;

(b) $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} Y$;

(c) $Y' = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} Y$.

12. Considere a seguinte equação diferencial

$$y'''(t) - y'(t) = 2t \tag{18}$$

(a) Ache uma solução particular da forma $y(t) = \beta t^2, \beta \in \mathbb{R}$.

(b) Transforme a equação num sistema de equações diferenciais de primeira ordem da forma

$$X' = AX + H(t)$$

onde A é uma matriz 3×3, e $H(t)$ é o termo não-homogêneo.

(c) Ache a solução geral do sistema do item b) sabendo que os autovalores da matriz A são necessariamente $-1, 0, 1$.

Dica: Uma solução particular pode ser facilmente obtida da resposta ao item a).

(d) Dê a solução geral da equação (18), usando o item anterior.

13. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e $f(z)$ uma função com $f(1) = \alpha, f(0) = \beta$ e $f'(0) = \gamma$.

(a) Ache $f(A)$ em função de α, β e γ. Verifique que se $f(z) = 1, \forall\, z$ então que $f(A) = I$, e se $f(z) = z, \forall\, z$ então $f(A) = A$. Quem não verificar e errar a conta terá o resto da questão desconsiderada.

(b) Determine as condições sobre α, β e γ para que $f(A)$ seja inversível.

(c) Resolva

$$\left(I + A^{10}\right) X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

usando uma função $f(z)$ tal que $f(A) = \left(I + A^{10}\right)^{-1}$.

14. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcule $e^{\pi A}$.

(b) Calcule $e^{\frac{\pi}{2} A}$.

15. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Calcule $\cos\left(\frac{\pi}{2} A\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} A\right)$.

16. Considere a seguinte equação diferencial

$$y'''(t) - 2y''(t) - y'(t) + 2y(t) = t \tag{19}$$

   (a) Reescreva-a como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem.

   (b) Sabendo que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Calcule a solução geral do sistema de equações diferenciais de primeira ordem obtido no item (a)

   (c) A partir da solução encontrada no item (b), dê a solução geral da equação diferencial proposta.

17. Considere uma mola de constante k_1 presa a uma parede e a uma massa m_1. A massa m_1 também está presa a uma massa m_2 através de uma mola com constante k_2. Finalmente a massa m_2 está presa a uma outra parede por meio de uma mola de constante k_3.

   (a) Encontre um sistema de **primeira** ordem e as condições iniciais que modelem a situação acima;

   (b) Se $k_1 = k_3 = 1$, $k_2 = 2$, $m_1 = 0.5$ e $m_2 = 2$, resolva o sistema encontrado no item (a) quando a massa m_1 é deslocada de uma unidade de distância (para longe da parede) de sua posição de equilíbrio.

18. Seja A uma matrix 2×2. Usando cálculo funcional de matrizes, encontre uma forma geral para a matriz inversa.

19. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sabendo que existem vetores u,v e $w \in \mathbb{R}^3$ tais que $Au = 4u$, $Av = 2v$ e $Aw = -2w$, e que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 6 \\ 0 & 10 & -6 \\ 0 & -6 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -36 & 28 \\ -8 & 28 & -28 \\ -8 & -36 & 36 \end{pmatrix},$$

responda as questões abaixo:

(a) Calcule e^{tA}.

(b) Resolva $Y'(t) = AY(t)$, com $Y(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

(c) Encontre todos os valores de a, b e c para os quais temos $\lim_{t\to\infty} Y(t) = 0$.

20. A solução geral de um sistema homogêneo $X' = AX$ é dada por:

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} X(0).$$

(a) Ache a matriz A.

(b) Ache a solução geral do sistema não homogêneo

$$X' = AX + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

21. Verifique se as afirmações abaixo são falsas ou verdadeiras; justifique a sua resposta.

(a) Se $e^A = e^B$, então $A = B$.

(b) Se D é diagonal, então e^D também é diagonal.

(c) Se A é simétrica, então $f(A)$ é simétrica.

(d) Se A é singular, então existe B tal que $e^B = A$.

22. Considere o sistema diferencial:

$$X'(t) = AX(t) \tag{20}$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Encontre a solução geral de (20)

(b) Determine para quais condições gerais $X(0)$, a solução $X(t)$ tende a 0 quando $t \to +\infty$.

(c) Encontre uma solução particular de

$$X'(t) = AX(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

23. Seja a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcule

$$f(A) = A^7 - 4A^5 - 10A^3 + 78I$$

onde I é a matriz identidade 2×2.

24. Considere o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} x'' &= -2x' - 5y \\ y &= x' + 2y \end{aligned}$$

(a) Reescreva este sistema como um sistema equivalente de equações de primeira ordem.

(b) Resolva o sistema encontrado no item anterior, para as seguintes condições iniciais:

$$x(0) = 0,\ x'(0) = 0,\ \text{e } y(0) = 1$$

8 Lista de Exercícios Nº 8

1. Para cada um dos sistemas abaixo faça o seguinte:

   (a) Ache os autovalores e autovetores da matriz associada.

   (b) Classifique o ponto crítico $(0,0)$ quanto ao tipo e estabilidade.

   (c) Esboce o plano de fase.

      i. $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} z;$

      ii. $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} z;$

      iii. $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} z;$

      iv. $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} z$

2. Considere os sistema

$$X'(t) = \begin{pmatrix} a & \frac{a-1}{2} \\ \frac{a+1}{2} & a \end{pmatrix} X(t)$$

   (a) Encontre os valores de a de maneira que no retrato de fase há um nó atrativo.

   (b) Encontre os valores de a de maneira que no retrato de fase, as trajetórias sejam círculos. Fixe uma trajetória determinada e esboce esta trajetória explicitando em 3 pontos o vetor velocidade, dando as respectivas coordenadas.

3. Considere o sistema diferencial:

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a^2-1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

   (a) Para $a \neq 0$, encontre o conjunto das condições iniciais $(x(0), y(0), z(0))$ de modo que $X(t) \to 0$ quando $t \to +\infty$.

   (b) Definindo $Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, escreva o sistema diferencial que Y satisfaz. Determine os valores de a de modo que tal sistema possua um ponto crítico que seja uma espiral atratora.

4. Usando o método de autovetores, ache a solução geral do sistema abaixo:
$$X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} X(t).$$

5. A solução geral do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ onde $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ é dada por
$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{2t} \\ 3e^{-t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{21}$$
onde a e b são constantes arbitrárias.

   (a) Ache a matriz M na expressão
   $$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = MX(0)$$
   (b) Ache a matriz A. [Dica: Considere $X'(0)$.]
   (c) Que condição $X(0)$ deve satisfazer para que $\lim_{t\to\infty} X(t) = 0$?

6. Considere o sistema
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} z.$$
   (a) Ache os autovalores e autovetores da matriz associada ao sistema acima.
   (b) Esboce o plano de fase.
   (c) Quais são os pontos críticos do sistema?

7. Determine os pontos críticos dos sistemas

   (a) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= x - xy \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= y + 2xy \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= y \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \mu(1-x^2)y - x \end{cases}, \qquad \mu > 0.$

8. Encontre as trajetórias de
$$\theta'' + \theta - \theta^3 = 0$$
Generalize para a equação
$$\theta'' + f(\theta) = 0.$$

9. Determinar os pontos críticos reais e discutir os respectivos tipos e características de estabilidade dos seguintes sistemas

(a) $\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} & = & x + y^2 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} & = & x + y \end{array} \right.$

(b) $\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} & = & 1 - y \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} & = & x^2 - y^2 \end{array} \right.$

10. Considere o seguinte modelo predador-presa:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x + \frac{3}{4}xy \\ \frac{dy}{dt} &= 2y\left(1 - \frac{y}{2}\right) - \frac{2}{3}xy \end{aligned} \tag{22}$$

(a) $x(t)$ representa a população de presas ou predadores ? Justifique sua resposta.

(b) Determine os pontos críticos do sistema de equações diferenciais. Classifique os pontos críticos determinando sua estabilidade ou instabilidade (em cada caso).

(c) Responda se há alguma possibilidade de que as espécies sobrevivam, dando uma breve justificativa.

11. Considere a equação de um pêndulo não-amortecido, i.e,

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0.$$

(a) Encontre o sistema associado.

(b) Mostre que os pontos críticos do sistema são $(\pm n\pi, 0)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(c) Mostre que o ponto crítico $(0, 0)$ é um centro do sistema linear correspondente. O que se pode concluir sobre a solução do sistema não-linear na vizinhança da origem. Mostre que a situação é semelhante para os pontos críticos da forma $(\pm 2k\pi, 0)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Interprete esses pontos fisicamente.

(d) Mostre que o ponto crítico $(\pi, 0)$ é um ponto de sela. Mostre que a situação é idêntica nos pontos $(\pm(2k-1)\pi, 0)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Interprete esses pontos fisicamente.

(e) Mostre que as trajetórias do sistema são dadas por

$$\frac{1}{2}y^2 + \kappa^2(1 - \cos x) = E,$$

onde $x = \theta$, $y = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$,$\kappa^2 = g/l$ e E é uma constante arbitrária. Observe que $1/2y^2$ é proporcional à energia cinética do pêndulo e que $\kappa^2(1 - \cos x)$ é proporcional à energia potencial no campo gravitacional do pêndulo. Conclua que E pode ser interpretada como a energia total do pêndulo.

(f) Tome $E = 2\kappa^2$. Mostre que as trajetórias são da forma

$$y = \pm 2\kappa \cos(x/2).$$

Desenhe essas trajetórias. Observe que estas trajetórias entram ou saem dos pontos críticos da forma $(\pm(2k-1)\pi, 0)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Pode-se mostrar que, se $E < 2\kappa^2$, então as trajetórias são fechadas e que, se $E > 2\kappa^2$, então as trajetórias não são fechadas. Use essa informação para esboçar o plano de fase do pêndulo não-amortecido.

12. Os sistemas abaixo podem ser interpretados como modelos para a interação entre duas espécies, x e y, competindo pelo mesmo alimento. Para cada um dos sistemas abaixo

   (a) Ache os pontos críticos

   (b) Para cada ponto crítico, encontre a linearização correspondente e calcule os respectivos autovalores e autovetores; classifique cada ponto quanto ao tipo e estabilidade.

   (c) Esboce o retrato de fase

   (d) Determinar o limite de x e y quando $t \to \infty$ para as possíveis condições iniciais; interprete o resultado em termos das populações das duas espécies.

      i. $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= x(1.5 - x - 0.5y) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= y(2 - y - 0.75x) \end{cases}$

      ii. $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= x(1 - x - 0.5y) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= y(2.5 - 1.5y - 0.25x) \end{cases}$

      iii. $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= x(1 - x - y) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= y(1.5 - y - x) \end{cases}$

(e) Considere a seguinte equação diferencial de segunda ordem:

$$y'' - (1-y^2)y' + y - y^2 = 0$$

i. Reescreva esta equação como um sistema de equações diferencias de primeira ordem.
ii. Determine os pontos críticos do sistema do item anterior.
iii. Nas vizinhanças de cada ponto crítico, encontre um sistema linear de aproximação, determine o tipo do ponto crítico e sua característica de estabilidade.
iv. Esboce o retrato de fase do sistema não linear.

13. Considere o sistema

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \frac{x}{1+t}, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \frac{y}{1+t}. \end{cases}$$

Mostre que, apesar do sistema não ser autônomo, as trajetórias a partir de um ponto (x_0, y_0), não dependem do instante t_0 considerado.

14. Considere o seguinte sistema não linear de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} x' &= -4x - y \\ y' &= \frac{1}{2}(25 - x^2) \end{aligned}$$

(a) Determine os pontos crítico do sistema.
(b) Determine, para cada ponto crítico, o sistema linear de aproximação, seu tipo, e característica de estabilidade.
(c) Esboce o retrato de fase do sistema, destacando a trajetória que passa por $(5, -15)$.

15. Considere o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} x' &= y + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' &= -x + y(1 - x^2 - y^2) \end{aligned}$$

Seja $r^2 = x^2 + y^2$ o quadrado da coordenada polar r (o raio) do ponto (x, y).

(a) Ache uma expressão para $\frac{d}{dt}r^2$ em termos de r^2. Determine para quais valores de $r(t)$

i. o raio $r(t)$ cresce,

ii. o raio $r(t)$ decresce,

(b) Ache o valor de r tal que o círculo $x^2+y^2 = r^2$ seja uma trajetória, e determine o sentido de movimento (horário ou anti-horário).

16. Considere duas espécies com populações $x(t)$ e $y(t)$ competindo entre si de acordo com o seguinte sistema

$$\frac{dx}{dt} = x\,(4 - x - 3y)$$
$$\frac{dy}{dt} = y\,(3 - 3y - x)$$

(a) Determine os pontos críticos, isto é, as populações em equilíbrio.

(b) Linearize em torno dos pontos críticos (pontos de equilíbrio) e classifique-os, determinando sua estabilidade ou instabilidade (em cada caso).

(c) Esboce o retrato de fase e determine a espécie x ou y que vai sobreviver.

(d) Ache os pontos de equilíbrio do sistema acima e classifique-os quanto ao seu tipo e estabilidade.

(e) Esboce o retrato de fase do sistema.

17. Considere o sistema

$$x' = (1 - y)x \tag{23}$$

$$y' = (\alpha - x)y \tag{24}$$

onde $\alpha > 1$

(a) Determine os pontos críticos do sistema.

(b) Encontre a linearização do sistema em torno dos pontos críticos e classifique-os, determinando estabilidade ou instabilidade.

(c) Esboce o retrato de fase do sistema.

(d) Considere $f(x, y) = \alpha \ln|x| - \ln|y| + y - x, \quad x, y \neq 0$. Mostre que $f(x, y)$ é constante ao longo das curvas integrais do sistema, i.e f é uma *integral primeira.*

9 Algumas Respostas

9.1 Lista de Exercícios Nº 1

1. (a) $y(x) = c\mathrm{e}^{x} + 2x\mathrm{e}^{x}$, $c \in \mathbb{R}$.

   (b) $y(x) = c\mathrm{e}^{-x^2} + x^2\mathrm{e}^{-x^2}$, $c \in \mathbb{R}$.

   (c) $y(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x) - x\cos(x) + c}{x^2}$, $c \in \mathbb{R}$.

   (d) $y(x) = \dfrac{\tan^{-1}(x) + c}{(1+x^2)^2}$, $c \in \mathbb{R}$ e $\tan^{-1}(x)$ denota o arco tangente de x.

18. Aproximadamente 6.06 minutos, i.e, 6 minutos e 4 segundos.

20. (a) $P' = kP$, $k \in \mathbb{R}$;

    (b) $P(t) = 6.0 \times 10^8 \mathrm{e}^{t\frac{\ln 5}{300}}$;

    (c) O ano de saturação é aproximadamente 2273.

22. (a) A equação é $2ty^2 + 2y^3 + (2t^2y + 6ty^2)y' = 0$;

    (b) A solução é dada implicitamente por $t^2\phi(t)^2 + 2t\phi(t)^3 = -1$

    (c) A equação do item (a) é *não-linear*, *exata*, *homogênea*.

9.2 Lista de Exercícios Nº 2

1 (a) $x_n = 2n!$

  (b) $x_n = 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$

  (c) $x_0 = 1$ e $x_n = 0$ para $n > 0$

  (d) $x_n = 2 + \frac{e^n - 1}{e-1}$

  (e) $x_n = 2^n n!$

9 R\$139.978

13 A equação é: $x_{n+1} = x_n + n + 1$. A solução é: $x_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$

15 (a)

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 1$$

$$x\Gamma(x) = \int_0^\infty x t^{x-1} e^{-t}\,dt = \int_0^\infty e^{-t}\,d(t^x) =$$
$$e^{-t}t^x\Big|_0^\infty - \int_0^\infty t^x\,d(e^{-t}) = 0 + \int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt = \Gamma(x+1)$$

(b) Para n inteiro, a solução da equação de diferenças $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ com o valor inicial $\Gamma(1) = 1$, é precisamente $\Gamma(n) = (n-1)!$

9.3 Lista de Exercícios Nº 3

2. (a) $e_{n+1} = \left[\xi_n + \xi_n^2 \phi(\xi_n) + \phi^3(\xi_n)\right] h^2$;

   (b) $e_{n+1} = \left[1 + (\xi_n + \phi(\xi_n))^{-1/2}\right] \dfrac{h^2}{4}$;

   (c) $e_{n+1} = \left[2 - 2\xi_n e^{-\phi(\xi_n)} - e^{-2\phi(\xi_n)}\right] \dfrac{h^2}{2}$.

6. (b) $\phi_2(t) = 2 - t + 0.001\mathrm{e}^t$;

   (c) $\lim\limits_{t\to\infty} (\phi_2(t) - \phi_1(t)) = \infty$.

9.4 Lista de Exercícios Nº 4

2 (a) $C_1 e^t + C_2 e^{-3t}$

(b) $C_1 + C_2 e^{-5t}$

(c) $C_1 e^{3t/2} + C_2 e^{-3t/2}$

4 $\lambda = n^2$ onde $n = 1, 2, \ldots$ é um inteiro positivo qualquer. A solução é $y(t) = \frac{1}{n} \operatorname{sen} nt$. Para $y'(0) = \alpha$, $\alpha \neq 0$, os valores possíveis de λ são os mesmos e as soluções são múltiplos das soluções anteriores. As condições relevantes são $y(0) = 0$ e $y(\pi) = 0$ enquanto a condição sobre $y'(0)$ só fixa a escala da solução. Escrevendo a equação na forma

$$\frac{d^2}{dx^2} y = -\lambda y$$

podemos interpretar os possíveis valores de $-\lambda$ como os autovalores de $\frac{d^2}{dx^2}$ no espaço linear de funções com duas derivadas contínuas e que são zero nos pontos 0 e π.

7 (a) $C_1 e^{-4t} + C_2 e^{2t}$

(b) $\frac{1}{3} e^{-4t} + \frac{2}{3} e^{2t}$

(c) πe^{-4t}

10 (a) $y(t) = e^{-t} + 3te^{-t}$

(b) $y(t) = \frac{e^- t}{1+t^2}$

16 (Resposta ao item (a)) Se $k \neq mn^2$ para qualquer inteiro $n = 1, 2, \ldots$ então

$$y(t) = a\text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + b\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$
$$+ \sum_{n=0}^{N_1} \frac{a_n}{k - mn^2}\text{sen}\,(nt) + \sum_{n=0}^{N_2} \frac{b_n}{k - mn^2}\cos(nt)$$

onde a e b são escolhidos de modo que $y(0) = y'(0) = 0$.

Se $k = m\ell^2$ para um inteiro ℓ então

$$y(t) = a\text{sen}\,(\ell t) + b\cos(\ell t) + \frac{a_\ell}{2m\ell}t\cos(\ell t) - \frac{b_\ell}{2m\ell}t\text{sen}\,(\ell t)$$
$$+ \sum_{n=0, n\neq\ell}^{N_1} \frac{a_n}{k - mn^2}\text{sen}\,(nt) + \sum_{n=0, n\neq\ell}^{N_2} \frac{b_n}{k - mn^2}\cos(nt)$$

onde a e b são escolhidos de modo que $y(0) = y'(0) = 0$.

24

$$\begin{aligned} P(n) &= C(n) + I(n) + 1 \\ C(n) &= \alpha P(n-1) \\ I(n) &= \beta(C(n) - C(n-1)) \end{aligned}$$

das quais deduzimos

(a)
$$C(n+2) - \alpha(1+\beta)C(n+1) + \alpha\beta C(n) = \alpha$$

(b)
$$\frac{\alpha}{1-\alpha}$$

(c) Para que haja estabilidade, o módulo da parte real das duas raízes de $\lambda^2 - \alpha(1+\beta)\lambda + \alpha\beta = 0$ devem ser menor que 1. As raízes são:
$$\frac{\alpha}{2}\left(1 + \beta \pm \sqrt{(1-\beta)(1+3\beta)}\right)$$
Oscilações ocorrem quando as raízes são complexas, e para uma raiz real, quando é negativa. Pela interpretação económica, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

(a) Raízes complexas: $\beta > 1$ Estabilidade e oscilações quando $\alpha(1+\beta) < 2$

(b) Raízes reais: $\beta < 1$. As duas raízes são positivas e não há oscilações. Estabilidade quando

$$\frac{\alpha}{2}\left(1+\beta+\sqrt{(1-\beta)(1+3\beta)}\right) < 1$$

26 (a)

$$\begin{aligned} p(n) &= qp(n+1) + (1-q)p(n-1) \\ p(N) &= 0 \\ p(0) &= 1 \end{aligned}$$

A primeira equações é válida para $0 \le n \le N-1$.

(b) Para $q \neq \frac{1}{2}$, sejam

$$r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4q+4q^2}}{2}$$

então

$$p(n) = \frac{r_2^N}{r_2^N - r_1^N} r_1^n - \frac{r_1^N}{r_2^N - r_1^N} r_2^n$$

Para $q = \frac{1}{2}$,

$$p(n) = \left(1 - \frac{n}{N}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(c) Para $q \neq \frac{1}{2}$,

$$\lim_{N\to\infty} p(n) = r_1^n,$$

para $q = \frac{1}{2}$,

$$\lim_{N\to\infty} p(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

10 Transformada de Laplace

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\dfrac{1}{s}, \qquad s > 0$
2. e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}, \qquad s > a$
3. t^n, $n =$ inteiro positivo	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}, \qquad s > 0$
4. t^p, $p > -1$	$\dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \qquad s > 0$
5. $\operatorname{sen} at$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}, \qquad s > 0$
6. $\cos at$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}, \qquad s > 0$
7. $\operatorname{senh} at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}, \qquad s > \lvert a\rvert$
8. $\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}, \qquad s > \lvert a\rvert$
9. $e^{at}\operatorname{sen} bt$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}, \qquad s > a$
10. $e^{at}\cos bt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \qquad s > a$
11. $t^n e^{at}$, $n =$ inteiro positivo	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \qquad s > a$
12. $u_c(t)$	$\dfrac{e^{-cs}}{s}, \qquad s > 0$
13. $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$
14. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$
15. $f(ct)$, $c > 0$	$\dfrac{1}{c}F\left(\dfrac{s}{c}\right)$
16. $\displaystyle\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$
17. $\delta(t-c)$	e^{-cs}
18. $f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
19. $(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$