PUC-Rio
Desafio em Matemática
15 de novembro de 2008

Nome:______________________________ Inscrição:____________
Assinatura:______________________________ Identidade:____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	1.0		
2	1.0		
3	1.0		
4	1.0		
5a	1.0		
5b	1.0		
6a	1.0		
6b	1.0		
7	2.0		
Nota final	10.0		

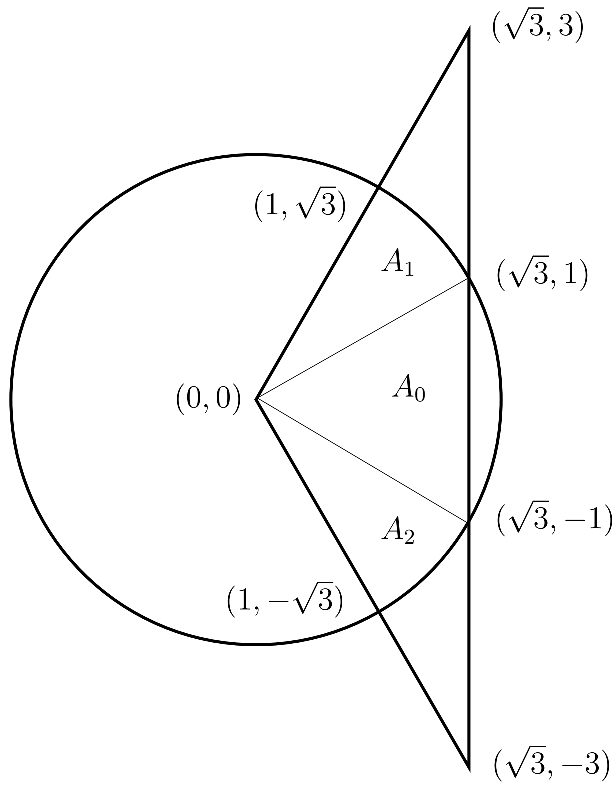
Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou caneta preta.
  Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. **(1 ponto)** Seja C o círculo de centro $(0,0)$ e raio 2. Seja T o triângulo de vértices $(0,0)$, $(\sqrt{3},3)$ e $(\sqrt{3},-3)$. Calcule a área da região comum a C e T (ou seja, do conjunto de pontos que estão do lado de dentro de C e de T).

   Solução:

   As interseções dos lados do triângulo com o círculo são as indicadas na figura.



   Note que os ângulos definidos na origem são de 30, 60 e 30 graus.

   O triângulo de vértices $(0,0)$, $(\sqrt{3},1)$ e $(\sqrt{3},-1)$ (a região A_0 na figura) é equilátero de lado 2 logo tem área $\sqrt{3}$. A 'fatia' de vértices $(0,0)$, $(\sqrt{3},1)$ e $(1,-\sqrt{3})$ (a região A_1 na figura) corresponde a $1/12$ do círculo e portanto tem área $\pi/3$. A região A_2 tem a mesma área. Assim a área total é

$$\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}.$$

2. **(1 ponto)** Encontre um polinômio $P(x)$ tal que $\cos(5t) = P(\cos(t))$ para todo t.

Solução:

Temos $\cos(2t) = \cos^2(t) - \operatorname{sen}^2(t)$ e $\operatorname{sen}(2t) = 2\operatorname{sen}(t)\cos(t)$. Donde, escrevendo $c = \cos(t)$ e $s = \operatorname{sen}(t)$ temos

$$\begin{aligned}
\cos(4t) &= (c^2 - s^2)^2 - (2sc)^2 = c^4 - 6s^2c^2 + s^4 \\
\operatorname{sen}(4t) &= 2(2sc)(c^2 - s^2) = 4sc^3 - 4s^3c \\
\cos(5t) &= \cos(4t)\cos(t) - \operatorname{sen}(4t)\operatorname{sen}(t) \\
&= (c^4 - 6s^2c^2 + s^4)c - (4sc^3 - 4s^3c)s \\
&= c^5 - 10s^2c^3 + 5s^4c \\
&= c^5 - 10(1 - c^2)c^3 + 5(1 - c^2)^2c \\
&= 16c^5 - 20c^3 + 5c.
\end{aligned}$$

Assim $P(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$.

3. **(1 ponto)** Calcule a soma abaixo.

$$\frac{1}{3^2-4}+\frac{1}{5^2-4}+\frac{1}{7^2-4}+\cdots+\frac{1}{2009^2-4}$$

Solução:

Temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3^2-4} &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right)\\
\frac{1}{5^2-4} &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)\\
\frac{1}{7^2-4} &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)\\
\frac{1}{9^2-4} &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)\\
\vdots\ &\ \vdots\\
\frac{1}{2007^2-4} &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2005}-\frac{1}{2009}\right)\\
\frac{1}{2009^2-4} &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2007}-\frac{1}{2011}\right)
\end{aligned}$$

Cancelando termos temos que a soma pedida é

$$S=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2009}-\frac{1}{2011}\right)=\frac{4037084}{12120297}.$$

4. **(1 ponto)** Diga se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa; justifique.

   Para todo inteiro positivo k pelo menos um dentre os inteiros $6k-1$, $6k+1$, $6k+5$ e $6k+7$ é primo.

   Solução:

   A afirmação é falsa. O menor contra-exemplo é $k = 88$ pois

   $$6k-1 = 527 = 17 \cdot 31, \quad 6k+1 = 529 = 23^2,$$
   $$6k+5 = 533 = 13 \cdot 41, \quad 6k+7 = 535 = 5 \cdot 107.$$

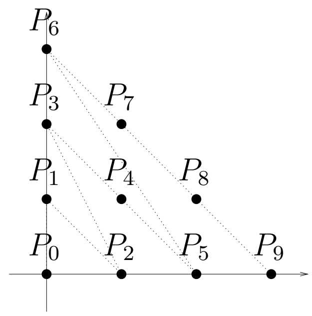
   Uma forma fácil de encontrar contra-exemplos é a seguinte. Dado $k > 0$, faça $a_{-1} = 6k-1$, $a_1 = 6k+1$, $a_5 = 6k+5$, $a_7 = 6k+7$. Tome $\tilde{k} = k + a_{-1} \cdot a_1 \cdot a_5 \cdot a_7$. Para cada $c = -1, 1, 5, 7$ temos

   $$\tilde{a}_c = 6\tilde{k} + c = a_c + 6 \cdot a_{-1} \cdot a_1 \cdot a_5 \cdot a_7.$$

   Assim $\tilde{a}_c$ é múltiplo de a_c. Como $1 < a_c < \tilde{a}_c$ temos que $\tilde{a}_c$ não é primo e portanto $\tilde{k}$ é um contra-exemplo para a afirmação.

   Para $k = 1$ a construção acima obtem $a_{-1} = 5$, $a_1 = 7$, $a_5 = 11$, $a_7 = 13$, $\tilde{k} = 1 + 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 5006$.

5. Seja $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ o conjunto dos pontos do plano com coordenadas no conjunto dos naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Enumere estes pontos como $P_0, P_1, P_2, \ldots$, listando (x_a, y_a) antes de (x_b, y_b) se $x_a + y_a < x_b + y_b$ ou, caso $x_a + y_a = x_b + y_b$, se $x_a < x_b$. Assim, por exemplo, $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (0, 1)$, $P_2 = (1, 0)$; a figura indica mais alguns pontos.



(a) **(1 ponto)** Determine as coordenadas de P_{2009}.

(b) **(1 ponto)** Se $P_n = (x, y)$, encontre n em função de x e y.

Solução:

A diagonal $x + y = 0$ tem o número 0.

A diagonal $x + y = 1$ tem os 2 números 1 e 2.

A diagonal $x + y = 2$ tem os 3 números de $3 = 1 + 2$ a 5.

A diagonal $x + y = 3$ tem os 4 números de $6 = 1 + 2 + 3$ a 9.

A diagonal $x + y = 4$ tem os 5 números de $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ a 14.

A diagonal $x + y = 5$ tem os 6 números de $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ a 20.

...

A diagonal $x + y = k$ tem os $k + 1$ números de $k(k + 1)/2 = 1 + 2 + \cdots + k$ a $(k(k + 1)/2) + k$.

(a) Observe que para $k = 62$ temos $k(k + 1)/2 = 1953$. e $(k(k + 1)/2) + 56 = 2009$. Assim $P_{2009} = (56, 6)$.

(b) Temos $n = ((x + y)(x + y + 1)/2) + x$.

6. Um baralho tem $n+1$ cartas verdes e n cartas amarelas. Embaralhamos as cartas e passamos a tirar as cartas uma por uma, contando as cartas de cada cor. Dizemos que a posição das cartas foi *boa* se da primeira até a última carta o número de cartas verdes contadas até este ponto for sempre maior do que o número de cartas amarelas. Por exemplo, com $n = 2$, a posição $VVAVA$ é boa pois o número de cartas verdes será sempre maior do que o número de cartas amarelas. Por outro lado, a posição $VVAAV$ não é boa, pois após terem sido contadas as quatro primeiras cartas temos um empate com duas cartas de cada cor.

   (a) **(1 ponto)** Para $n = 1, 2, 3, 4$, determine a probabilidade de que a posição das cartas seja boa.

   (b) **(1 ponto)** Ache a probabilidade de que a posição das cartas seja boa (em função de n).

   Solução:

   O item (a) pode ser feito contando os casos: as respostas são 1/3, 1/5, 1/7 e 1/9. Não apresentaremos os detalhes aqui pois estes valores seguem facilmente do item (b).

   Uma *permutação cíclica* das cartas é obtida fazendo um *corte simples*, i.e., cortando o baralho em duas partes e juntando as partes de novo na ordem inversa. Se numerarmos as cartas inicialmente como $1, 2, \ldots, m-1, m, m+1, \ldots, 2n+1$ então após o corte a posição das cartas será $m+1, \ldots, 2n+1, 1, 2, \ldots, m-1, m$. Dizemos aqui que cortamos na carta m. Consideramos a identidade como um caso de permutação cíclica ou corte simples (correspondente a cortar na carta $m = 2n+1$). Note que a composição de permutações cíclicas é uma permutação cíclica. A partir de uma dada posição há $2n+1$ posições accessíveis por permutação cíclica (contando a posição inicial). Estas $2n+1$ posições são sempre distintas: isto pode ser verificado diretamente mas também segue do que veremos a seguir.

   Uma posição pode ser representada por uma seqüência de inteiros: calcule o número de cartas verdes menos o número de cartas amarelas até cada posição. Para a posição $VAVAAVAVVAV$ a seqüência é $(1, 0, 1, 0, -1, 0, -1, 0, 1, 0, 1)$. Note que esta seqüência de inteiros sempre começa com ± 1 e acaba com 1 e que números vizinhos diferem de 1; aliás, toda seqüência com estas propriedades corresponde a uma posição. Uma posição é boa se e somente se todas os inteiros na seqüência correspondente forem estritamente positivos.

   Vamos estudar o efeito de cortar na carta m nas seqüências. No exemplo acima, escolha $m = 5$:

$$VAVAA - VAVVAV \quad \to \quad VAVVAV - VAVAA.$$

A nova seqüência é portanto $(1, 0, 1, 2, 1, 2; 3, 2, 3, 2, 1)$. Para obter esta nova seqüência diretamente a partir da antiga (sem passar pelas posições de cartas) devemos partir a seqüência original da mesma forma que partimos o baralho: $(1, 0, 1, 0, -1; 0, -1, 0, 1, 0, 1)$. Seja k o último número antes do ';': no caso $k = -1$. O início da nova seqüência (até o ';') é obtido a partir do final da antiga (após o ';') somando $-k$ (no caso, somando 1); o final da nova seqüência (após o ';') é obtido a partir do início da antiga (até o ';') somando $-k + 1$ (no caso, somando 2).

Afirmamos que dada uma posição qualquer sempre existe exatamente uma permutação cíclica que obtem uma posição boa. Por exemplo:

$$VAVAAVA - VVAV \quad \rightarrow \quad VVAV - VAVAAVA.$$

Para encontrar esta permutação, procure o valor mínimo na seqüência correspondente: no caso é $K = -1$. Procure agora a *última* aparição deste valor mínimo: no caso é $M = 7$:

$$(1, 0, 1, 0, -1, 0, \mathbf{-1}; 0, 1, 0, 1).$$

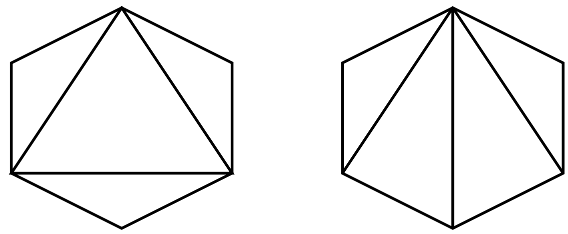
Esta é a carta *crítica* na qual devemos cortar. Depois do corte a seqüência fica

$$(1, 2, 1, 2; 3, 2, 3, 2, 1, 2, 1):$$

a construção garante que todos os inteiros na nova seqüência serão positivos, ou seja, que a nova posição será boa. Por outro lado, se fizermos outro corte simples a carta crítica sempre corresponderá a um inteiro não positivo na seqüência.

Particionamos portanto as posições em classes de tamanho $2n + 1$: em cada classe há exatamente uma posição boa. Assim, a probabilidade pedida é $1/(2n + 1)$.

7. **(2 pontos)** Um polígono convexo de $n > 3$ lados sempre pode ser decomposto em $n-2$ triângulos por $n-3$ diagonais que não se cruzem. Dizemos que uma tal decomposição é *ímpar* se todo vértice do polígono for vértice de um número ímpar de triângulos da decomposição. Por exemplo, na figura abaixo a primeira decomposição é ímpar mas a segunda não.

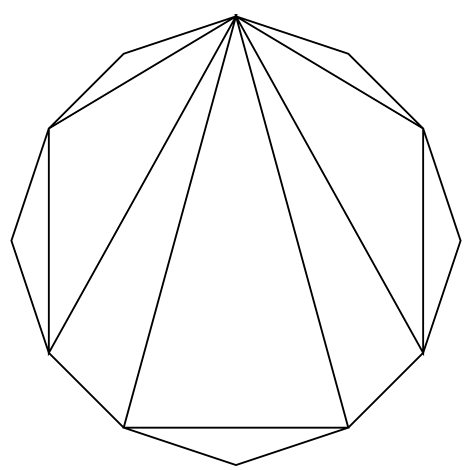


Determine para quais valores de n um polígono convexo de n lados admite decomposição ímpar.

Solução:

Um polígono convexo de n lados admite decomposição ímpar se e somente se n é múltiplo de 3.

Suponha $n = 3k$: vamos exibir uma decomposição. Chame os vértices de $P_0, P_1, \ldots, P_{3k-1}$. Trace as diagonais P_0P_2, P_2P_4, P_4P_0; P_0P_5, P_5P_7, P_7P_0; $\ldots$; P_0P_{3k-4}, $P_{3k-4}P_{3k-2}$, $P_{3k-2}P_0$. Em outras palavras, para $\ell = 1, \ldots, k-1$, trace as diagonais $P_0P_{3\ell-1}$, $P_{3\ell-1}P_{3\ell+1}$, $P_{3\ell+1}P_0$. A figura exemplifica a construção para $n = 12$ com o vértice P_0 em cima.



Para ver que se existe decomposição ímpar então n é múltiplo de 3, considere uma decomposição ímpar e pinte os triângulos alternadamente de branco e preto. A condição de que a decomposição é ímpar garante que todos os triângulos que tocam o bordo são da mesma cor (digamos branco).

Assim cada diagonal é lado de um único triângulo preto. Se existem b triângulos pretos, isto significa que o número de diagonais é $n-3=3b$. Assim, n é múltiplo de 3.