PUC-Rio
Desafio em Matemática
15 de outubro de 2009

Nome:______________________________________ Inscrição:____________
Assinatura:__________________________________ Identidade:____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	1,0		
2	1,0		
3	1,5		
4	1,5		
5	1,5		
6	1,5		
7	2,0		
Nota final	10,0		

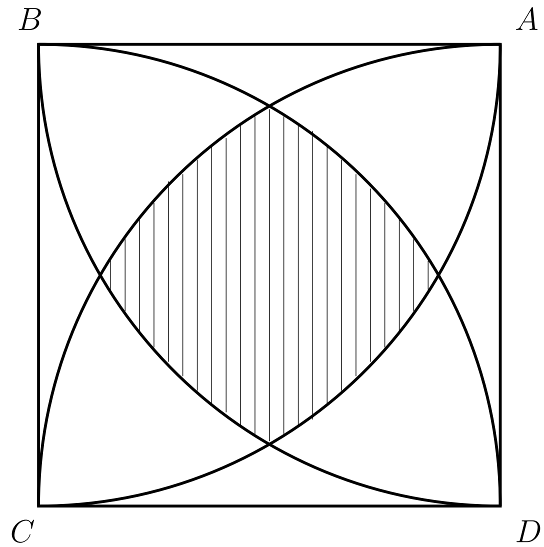
Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou caneta preta.
  Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. **(1,0 pontos)** Quantas raízes reais tem a equação abaixo?

$$x^9 - 5x^3 + 1 = 0$$

2. **(1,0 pontos)** Seja $ABCD$ um quadrado de lado 1. Trace círculos de raio 1 com centro em cada um dos quatro vértices. Determine a área da região interior aos quatro círculos (indicada na figura).



3. **(1,5 pontos)** Para n um inteiro positivo, defina

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ par}, \\ 2^n(n+1), & \text{ímpar}. \end{cases}$$

Assim, $f(1) = 4$, $f(2) = 1$, $f(3) = 32$, $f(4) = 2$, $f(5) = 192$, $f(6) = 3$ e $f(7) = 1024$.

Mostre que existe um inteiro positivo k tal que $f^k(2010) = 1$ e encontre o menor tal k.

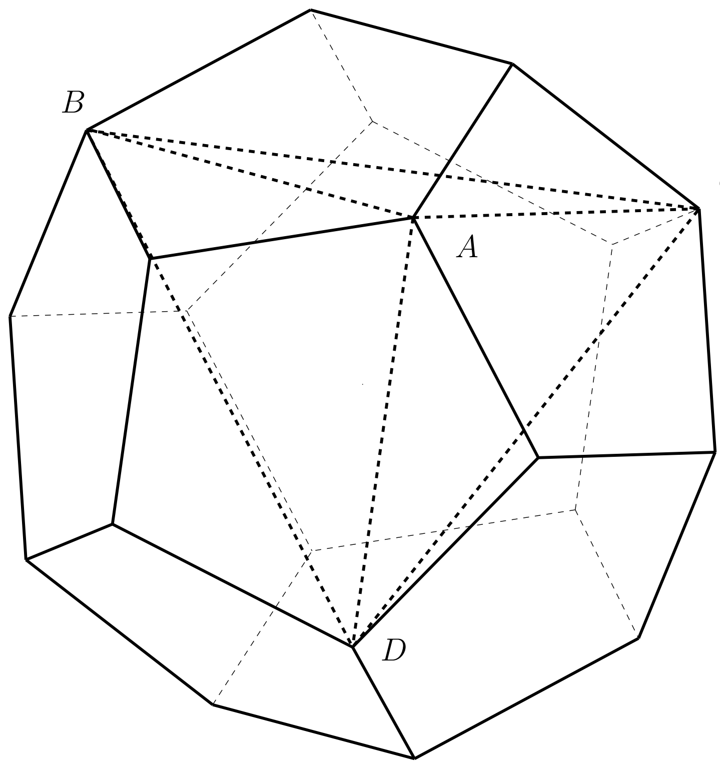
(Notação: $f^2(n) = f(f(n))$, $f^3(n) = f(f(f(n)))$, $f^{k+1}(n) = f(f^k(n))$.)

4. **(1,5 pontos)** Zé Roberto e Humberto disputam um jogo. Eles jogam um dado comum até sair duas vezes consecutivas o mesmo número. Se este número a aparecer repetido for par, ganha Zé Roberto; se for ímpar, ganha Humberto.

   Eles começam a partida: o primeiro número sorteado é 1, o segundo é 4, o terceiro é 2. Qual é, neste momento, a probabilidade de que Zé Roberto ganhe?

5. **(1,5 pontos)** Em um dodecaedro regular de aresta 1, considere um vértice arbitrário A. A partir de A ande ao longo de uma aresta, dobre à direita no primeiro vértice e marque o segundo vértice encontrado: faça isso das três formas possíveis para obter os vértices B, C e D, conforme a figura.

   Determine o volume do tetraedro de vértices A, B, C e D.



6. **(1,5 pontos)** Seja $g(n) = 3^n + 2^n - n$. Seja $a_0 = 0$ e defina $a_{n+1} = g(a_n)$. Assim, $a_1 = g(a_0) = g(0) = 3^0 + 2^0 - 0 = 2$ e $a_2 = g(2) = 11$.

   Determine o último algarismo de a_{2010} (escrito em notação decimal).

7. **(2,0 pontos)** Para inteiros não negativos a e b, defina $a \Uparrow b$ por $a \Uparrow 0 = 1$, $a \Uparrow 1 = a$, $a \Uparrow 2 = a^a$ e $a \Uparrow (b+1) = a^{(a \Uparrow b)}$. Assim, por exemplo,

$$2 \Uparrow 4 = 2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65536.$$

Encontre um inteiro positivo n tal que

$$2 \Uparrow n < 2010 \Uparrow 2010 < 2 \Uparrow (n+1).$$

Justifique sua resposta.