PUC-Rio
Desafio em Matemática
23 de outubro de 2010

Nome:______________________________ Inscrição:____________
Assinatura:___________________________ Identidade:__________

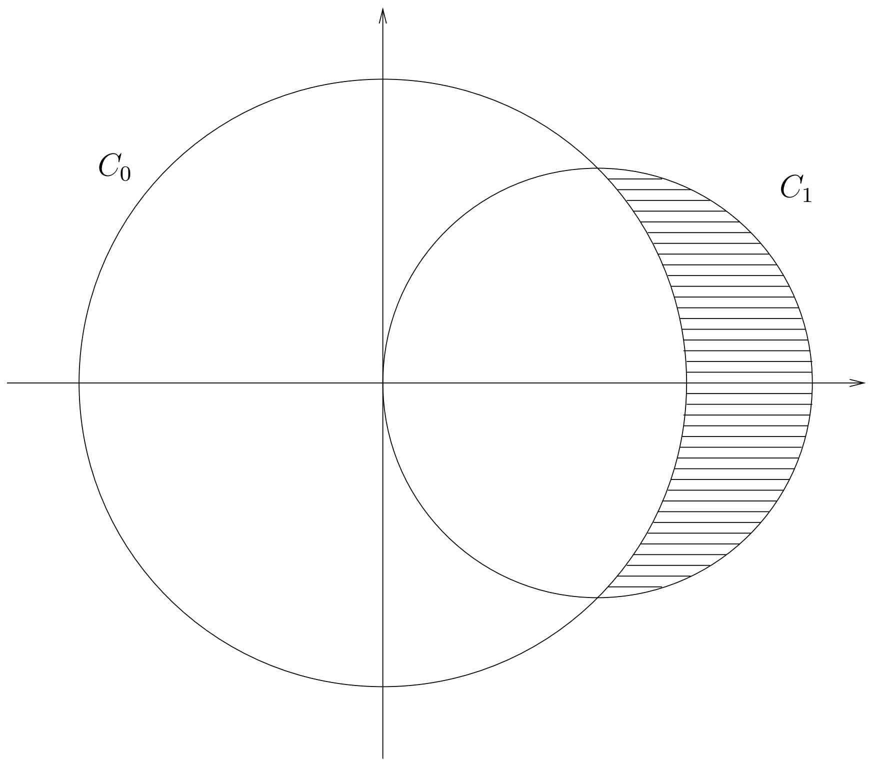
Questão	Valor	Nota	Revisão
1	1,0		
2	1,0		
3	1,0		
4	1,5		
5	1,5		
6	2,0		
7	2,0		
Nota final	10,0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou caneta preta.
  Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. **(1,0 pontos)**

   Na figura abaixo, o círculo maior C_0 tem centro $(0,0)$ e raio $\sqrt{2}$ e o círculo menor C_1 tem centro $(1,0)$ e raio 1.



   Calcule a área da região dentro de C_1 e fora de C_0.

2. **(1,0 pontos)**

   Para quantos valores inteiros e positivos de n vale a condição abaixo?

$$n^3 + 33n + 1 < 14n^2$$

3. **(1,0 pontos)**

Determine o menor inteiro positivo N para o qual a equação

$$100a + 144b + 150c = N$$

admite solução com a, b e c inteiros. Encontre uma solução para este valor de N.

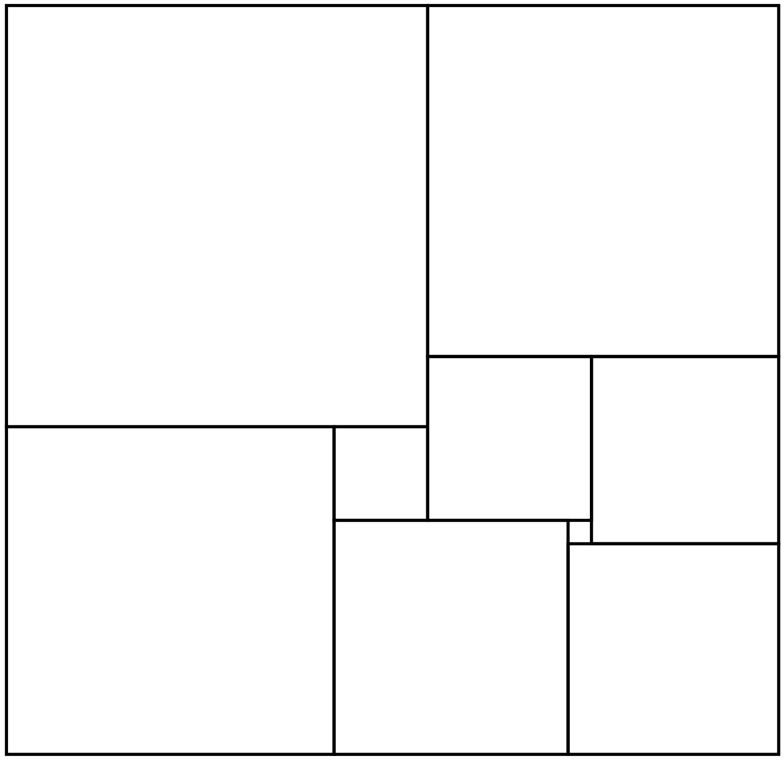
4. **(1,5 pontos)**

   Em Tumbolia há uma curiosa tradição para determinar o dia da Festa dos Crocodilos. Os artesãos fabricam uma urna com o número de bolinhas numeradas igual ao número do ano. Assim, por exemplo, em 2010 a urna tinha 2010 bolinhas numeradas (de 1 a 2010). Começando no dia 1 de janeiro, o Chefe de Cerimônias sacode a urna, tira uma bolinha, anota o número e joga a bolinha de volta na urna. No dia em que sai o primeiro número repetido acontece a Festa dos Crocodilos; se até o dia 31 de dezembro não aparecer nenhum número repetido não há festa naquele ano.

   Qual é o dia mais provável para a Festa dos Crocodilos em 2011?

5. **(1,5 pontos)**

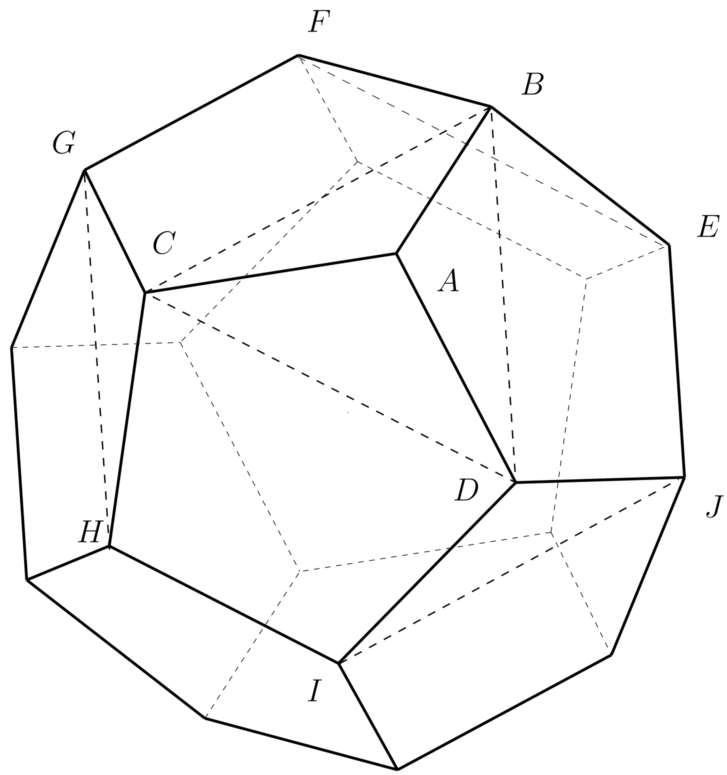
A figura mostra um retângulo decomposto como a união disjunta de 9 quadrados de lados diferentes.



Determine a razão entre os lados do retângulo.

6. **(2,0 pontos)**

Em um dodecaedro regular de aresta 1, considere um vértice arbitrário A. Sejam B, C e D os vizinhos de A e E, F, G, H, I e J os vizinhos de B, C, D diferentes de A. Seja X o sólido convexo de vértices A, B, C e D; seja Y o sólido convexo de vértices B, C, D, E, F, G, H, I e J.



Determine a razão entre o volume de X e o volume de Y.

7. **(2,0 pontos)**

Seja $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ o conjunto dos números naturais.

Dizemos que um polinômio $P(x, y, z)$ é *trilegal* se ele satisfizer as seguintes condições:

(i) Se $a, b, c \in \mathbb{N}$ então $P(a, b, c) \in \mathbb{N}$.

(ii) Se $a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1 \in \mathbb{N}$ e $P(a_0, b_0, c_0) = P(a_1, b_1, c_1)$ então $a_0 = a_1$, $b_0 = b_1$ e $c_0 = c_1$.

(iii) Para todo $n \in \mathbb{N}$ existem $a, b, c \in \mathbb{N}$ com $P(a, b, c) = n$.

Assim, por exemplo, $P(x, y, z) = x^3 + xy + z$ não é trilegal, pois satisfaz as condições (i) e (iii) mas não satisfaz a condição (ii).

Diga se existe algum polinômio trilegal. Se existir, dê exemplo; se não existir, demonstre este fato.