PUC-Rio
Desafio em Matemática
21 de outubro de 2012

Nome: GABARITO ______________________________ Inscrição:____________
Assinatura:______________________________ Identidade:____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	1,0		
2	1,0		
3	1,5		
4	1,5		
5	1,5		
6	1,5		
7	2,0		
Nota final	10,0		

Instruções

- Mantenha seu celular completamente desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- A prova pode ser resolvida a lápis comum, caneta azul ou caneta preta.
  Use lápis ou canetas de outras cores apenas para desenhos ou diagramas.
  Você tem o direito de usar régua, compasso, esquadro e transferidor.
  Você pode usar borracha.
- Não destaque as folhas da prova.
  Caso você precise de mais rascunho, peça ao fiscal.
  Ele grampeará folhas em branco ao final da sua prova.
  Todas as folhas utilizadas devem ser grampeadas e entregues.
  Suas anotações no rascunho poderão ser usadas a seu favor.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. **(1,0 ponto)**

   Encontre todas as raízes reais da equação abaixo.

$$\left(x-5\sqrt{x}\right)-5\sqrt{x-5\sqrt{x}}+6=0$$

   Solução:

   Note inicialmente que para que $\sqrt{x}$ esteja definida (nos reais) devemos ter $x \geq 0$. Mais do que isso, para que $\sqrt{x-5\sqrt{x}}$ esteja definida devemos ter $x-5\sqrt{x} \geq 0$ e portanto $x \geq 25$. Por outro lado, para $x \geq 25$ o lado esquerdo está bem definido.

   Fazendo a substituição $y=\sqrt{x-5\sqrt{x}}$ devemos ter $y^2-5y+6=0$ e portanto $y=2$ ou $y=3$. Devemos portanto resolver as equações $x-5\sqrt{x}=4$ e $x-5\sqrt{x}=9$. Fazendo a substituição $z=\sqrt{x}$ temos as equações $z^2-5z-4=0$ e $z^2-5z-6=0$ com raízes $z=(5\pm\sqrt{41})/2$ e $z=(5\pm\sqrt{61})/2$. Note que $(5-\sqrt{41})/2<0$ e $(5\pm\sqrt{61})/2<0$: estas raízes não nos servem. Assim os valores válidos para z são $z_1=(5+\sqrt{41})/2$ e $z_2=(5+\sqrt{61})/2$ e os respectivos valores de x são

$$x_1=z_1^2=\frac{33+5\sqrt{41}}{2}, \quad x_2=z_2^2=\frac{43+5\sqrt{41}}{2}.$$

   Note que $x_1>25$ e $x_2>25$, confirmando a validade destas raízes.

2. **(1,0 ponto)**

Seja

$$f(x) = x^{2012} + 2012.$$

Encontre os dois últimos algarismos da expansão decimal de

$$f^{2012}(2012).$$

(Aqui $f^2(x) = f(f(x))$, $f^3(x) = f(f(f(x)))$ e $f^{k+1}(x) = f(f^k(x))$.)

Solução:

Vamos calcular $a_k = f^k(2012) \bmod 100$ para alguns valores de k. Observe que se x_0 e x_1 são inteiros com $x_0 \equiv x_1 \pmod{100}$ então $f(x_0) \equiv f(x_1) \pmod{100}$. Sabemos também (pelos teoremas de Fermat e Euler) que $x^{2012} \equiv x^{12} \pmod{100}$ para todo inteiro x.

Temos $a_0 = 12$,

$$\begin{aligned}
a_1 &\equiv a_0^{12} + 12 \equiv 12^{12} + 12 \equiv 56 + 12 \equiv 68 \pmod{100} \\
a_2 &\equiv a_1^{12} + 12 \equiv 68^{12} + 12 \equiv 76 + 12 \equiv 88 \pmod{100} \\
a_3 &\equiv a_2^{12} + 12 \equiv 88^{12} + 12 \equiv 56 + 12 \equiv 68 \pmod{100} \\
a_4 &\equiv a_3^{12} + 12 \equiv 68^{12} + 12 \equiv 76 + 12 \equiv 88 \pmod{100}
\end{aligned}$$

e portanto, por indução,

$$a_k = \begin{cases} 12, & k = 0, \\ 88, & k > 0, \quad k \text{ par}, \\ 68, & k \text{ ímpar}. \end{cases}$$

Em particular, $a_{2012} = 88$ e os últimos dois algarismos de $f^{2012}(2012)$ são 88.

3. **(1,5 pontos)**

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = |x| + |x-1| + |x-2| + \cdots + |x-63| + |x-64|.$$

Encontre as soluções de $f(x) = 2012$.

Solução:

Temos

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 + 1 + 2 + \cdots + 62 + 63 + 64 = 2080, \\ f(1) &= 1 + 0 + 1 + \cdots + 61 + 62 + 63 = 2017, \\ f(2) &= 2 + 1 + 0 + \cdots + 60 + 61 + 62 = 1956, \\ &\vdots \quad \vdots \\ f(62) &= 62 + 61 + 60 + \cdots + 0 + 1 + 2 = 1956, \\ f(63) &= 63 + 62 + 61 + \cdots + 1 + 0 + 1 = 2017, \\ f(64) &= 64 + 63 + 62 + \cdots + 2 + 1 + 0 = 2080. \end{aligned}$$

Para $x \leq 1$ e para $x \geq 63$ temos $f(x) \geq 2017 > 2012$. Para $2 \leq x \leq 62$ temos $f(x) \leq 1956 < 2012$. Devemos portanto estudar os intervalos $[1, 2]$ e $[62, 63]$. Para $x \in [1, 2]$ temos

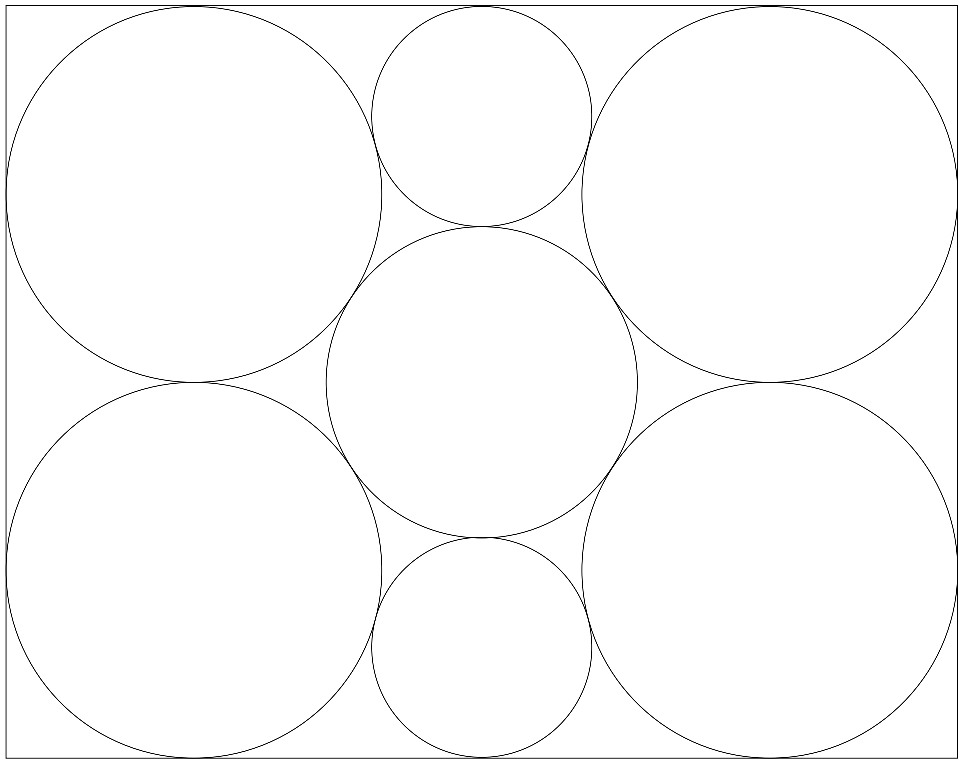
$$f(x) = (x) + (x-1) + (2-x) + \cdots + (64-x) = 2078 - 61x$$

e portanto $f(x) = 2012$ para $x = \frac{66}{61}$. Fazendo as contas análogas para $x \in [62, 63]$ encontramos a raiz $x = \frac{3838}{61}$. Assim as duas raízes são

$$x_1 = \frac{66}{61}, \quad x_2 = \frac{3838}{61}.$$

4. **(1,5 pontos)**

Na figura abaixo os círculos tangenciam os lados do retângulo e se tangenciam uns aos outros.



Determine a razão entre os lados do retângulo.

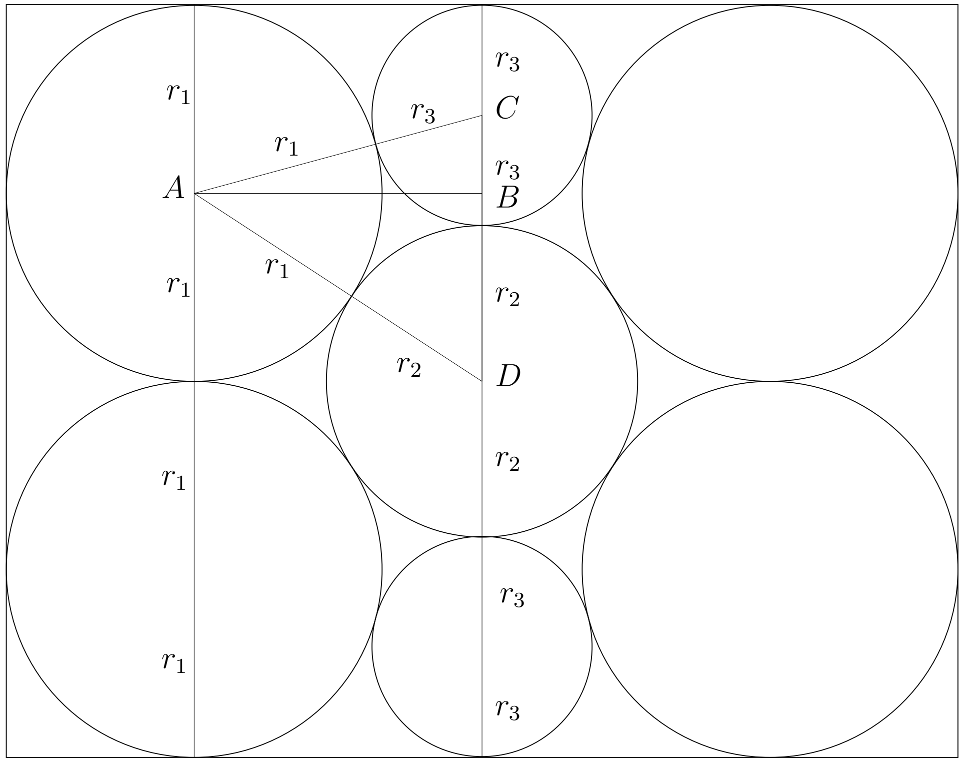
Solução:

Entendemos pela figura que os quatro círculos maiores nos cantos tem o mesmo raio r_1 e que os dois menores acima e abaixo têm o mesmo raio r_3. Seja r_2 o raio do círculo central.

Suponha sem perda de generalidade que $r_1 = 1$. Assim a altura do retângulo é igual a 4. Temos também $4r_3 + 2r_2 = 4$ ou $r_2 = 2 - 2r_3$.

Considere agora os triângulos retângulos ABC e ABD mostrados na figura. Temos $AC = r_1 + r_3 = 1 + r_3$, $AD = r_1 + r_2 = 3 - 2r_3$, $BC = r_1 - r_3 = 1 - r_3$, $BD = r_1 = 1$ donde

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2 \\ &= (1 + r_3)^2 - (1 - r_3)^2 = (3 - 2r_3)^2 - 1 \\ &= 4r_3 = 4r_3^2 - 12r_3 + 8 \end{aligned}$$



donde $r_3^2 - 4r_3 + 2 = 0$ e $r_3 = 2 \pm \sqrt{2}$. Como $0 < r_3 < 1$ devemos ter $r_3 = 2 - \sqrt{2}$ e $r_2 = 2\sqrt{2} - 2$. Temos ainda $AB = 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

A base do retângulo é igual a $2 + 2AB = 2 + 4\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ e portanto a razão entre os lados é igual a

$$\frac{1}{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Construímos assim uma configuração como a da figura satisfazendo as simetrias por reflexão nos eixos paralelos aos lados passando pelo centro do retângulo. Não interpretamos que faça parte do problema demonstrar o fato verdadeiro e interessante que não existem outras configurações próximas não simétricas.

5. **(1,5 pontos)**

Três urnas são colocadas uma do lado da outra contra uma parede. Em cada urna há inicialmente quatro bolas vermelhas e quatro bolas azuis.

O jogador (que sempre está de frente para a parede) começa em frente à urna do meio e retira de lá uma bola (as bolas são sempre retiradas ao acaso e depois de examinadas são sempre descartadas). Se a bola for vermelha, o jogador se move uma urna para a esquerda; se a bola for azul, ele se move uma para a direita. Ele novamente retira uma bola (ao acaso) da urna que estiver na sua frente neste momento; ele examina a bola (e a descarta). Novamente, se a bola for vermelha, o jogador se move uma urna para a esquerda; se a bola for azul, ele se move uma para a direita. O jogador repete o processo até o jogo terminar, o que ocorre se o jogador receber uma instrução impossível (isto é, se ele tira uma bola vermelha na urna da esquerda ou uma bola azul na urna da direita) ou se ele tentar tirar uma bola de uma urna vazia.

Qual é a probabilidade de que o jogo termine com o jogador tentando retirar uma bola de uma urna vazia?

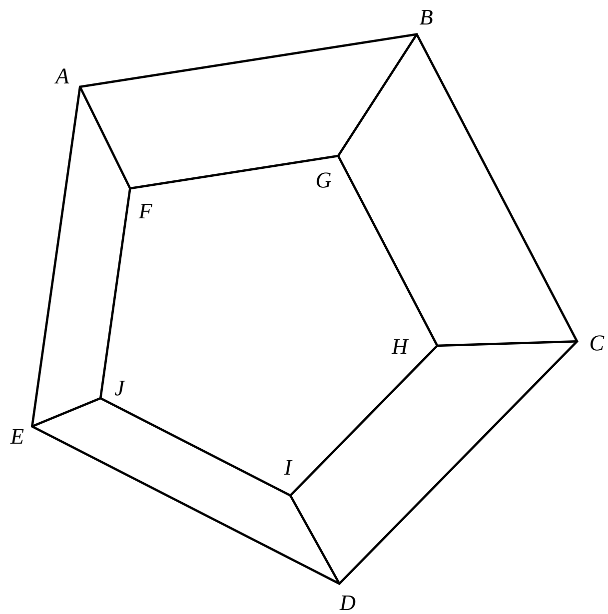
Solução:

Para que o jogo termine com o jogador tentando tirar uma bola de uma urna vazia isto deve ocorrer na urna central depois de passar quatro vezes por cada uma das outras duas urnas (em qualquer ordem). Assim as retiradas que devem ser examinadas são quatro na urna da esquerda (que devem obter as quatro bolas azuis) e quatro na urna da direita (que devem obter as quatro bolas vermelhas). A probabilidade de que isto ocorra é portanto igual a

$$p = \left(\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}\right)^2 = \frac{1}{4900}.$$

6. **(1,5 pontos)**

Considere o prisma mostrado em perspectiva na figura abaixo.



Sabemos que as bases $ABCDE$ e $FGHIJ$ são pentágonos regulares de lados a e b, respectivamente. Sabemos que as faces $ABGF$, $BCHG$, $CDIH$, $DEJI$ e $EAFJ$ são trapézios isósceles congruentes uns aos outros. Sabemos que os comprimentos das arestas AF, BG, CH, DI e EJ são todos iguais a b. Finalmente, sabemos que o ângulo entre a face $FGHIJ$ e a face $ABGF$ é igual ao ângulo entre as faces $ABGF$ e $BCHG$.

Determine os possíveis valores para a razão a/b.

Solução:

O fato das bases serem pentágonos regulares e de todas as faces laterais serem iguais garante que o poliedro é simétrico por uma rotação de $2\pi/5$ (ou 72 graus ou um quinto de volta). Assim os ângulo entre duas dentre as três faces adjacentes ao vértice G são iguais. Em outras palavras, o triedro no vértice G é equilátero. Assim os ângulos em G de cada uma das três faces são iguais. Os ângulos $\widehat{FGB}$ e $\widehat{GFA}$ são portanto iguais a $3\pi/10$ e os ângulos $\widehat{ABG}$ e $\widehat{BAF}$ são iguais a $2\pi/5$. Assim

$$a = b + 2b\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \left(1 + 2\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,b; \quad \frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

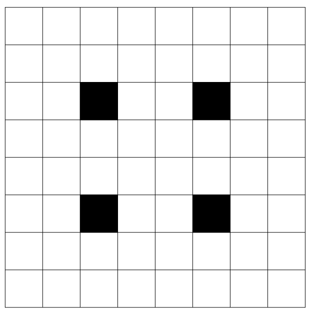
7. **(2,0 pontos)**

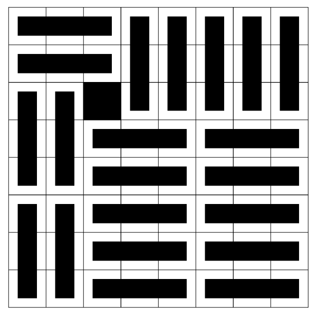
Um tabuleiro de xadrez é um quadrado de dimensões 8×8, dividido em 64 casas quadradas de dimensões 1×1. Dispomos de um tabuleiro e de 21 peças retangulares de dimensões 3×1. Desejamos colocar as 21 peças sobre o tabuleiro, cobrindo 63 das casas e deixando uma única casa descoberta.

Determine para quantas e quais casas é possível cobrir as demais 63 deixando aquela casa vazia.

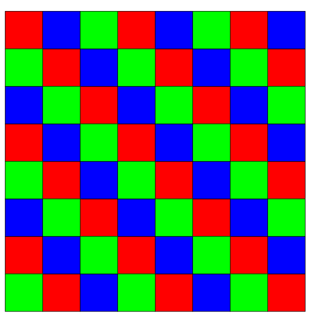
Solução:

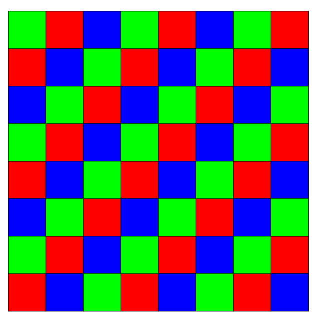
Há exatamente quatro casas, indicadas na primeira figura abaixo, para as quais é possível cobrir as demais e deixá-la vazia. A segunda figura mostra uma solução para uma das quatro casas. Para obter uma solução para outra casa basta girar o tabuleiro.





Falta demonstrar que é impossível cobrir o tabuleiro e deixar vazia qualquer outra casa. Para isso pinte as casas de vermelho, verde e azul como na primeira figura abaixo.





Observe que há 22 casas vermelhas mas apenas 21 casas verdes e 21 casas azuis. Observe ainda que cada peça deve cobrir uma casa de cada cor. Assim a casa vazia deve obrigatoriamente ser vermelha.

Repita agora o raciocínio com a pintura mostrada na segunda figura; novamente a casa vazia deve ser vermelha. As quatro casas indicadas acima são as únicas pintadas de vermelho nas duas configurações, qed.