PUC-Rio

Desafio em Matemática

6 de outubro de 2013

Nome:____ Inscrição:____________

Assinatura:____________________________________ Identidade:____________

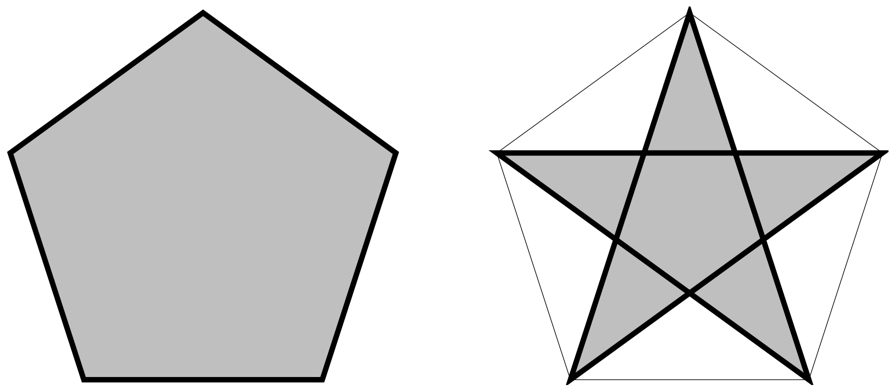
Questão	Valor	Nota	Revisão
1	1,0		
2	1,0		
3	1,5		
4	1,5		
5	1,5		
6	1,5		
7	2,0		
Nota final	10,0		

Instruções

- Mantenha seu celular completamente desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- A prova pode ser resolvida a lápis comum, caneta azul ou caneta preta.
  Use lápis ou canetas de outras cores apenas para desenhos ou diagramas.
  Você tem o direito de usar régua, compasso, esquadro e transferidor.
  Você pode usar borracha.
- Não destaque as folhas da prova.
  Caso você precise de mais rascunho, peça ao fiscal.
  Ele grampeará folhas em branco ao final da sua prova.
  Todas as folhas utilizadas devem ser grampeadas e entregues.
  Suas anotações no rascunho poderão ser usadas a seu favor.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. **(1,0 ponto)**

   O pentágono regular na primeira figura abaixo tem área igual a 1.
   Em um pentágono congruente ao primeiro, ligamos os vértices como na segunda figura: calcule a área da região sombreada.
   (Simplifique sua resposta; ela pode envolver raízes mas não deve envolver funções trigonométricas.)



2. **(1,0 ponto)**

   Seja $p(x) = 4x^3 - 3x$.
   Determine quantas raízes reais distintas admite a equação

$$p(p(p(x))) = 1.$$

3. **(1,5 ponto)**

   Seja n um inteiro positivo. Temos n^3 cubinhos de aresta 1. Colamos os cubinhos para fazer um grande cubo de aresta n. Escolhemos dois vértices opostos do grande cubo e consideramos o plano bissetor, i.e., o conjunto dos pontos do espaço equidistantes dos dois vértices escolhidos. Cuidadosamente serramos o grande cubo ao longo deste plano bissetor.

   Determine quantos cubinhos foram serrados neste processo (sua resposta deve ser dada em função de n; separe em casos se necessário).

4. **(1,5 pontos)**

   Encontre todas as soluções da equação abaixo com m e n inteiros positivos:

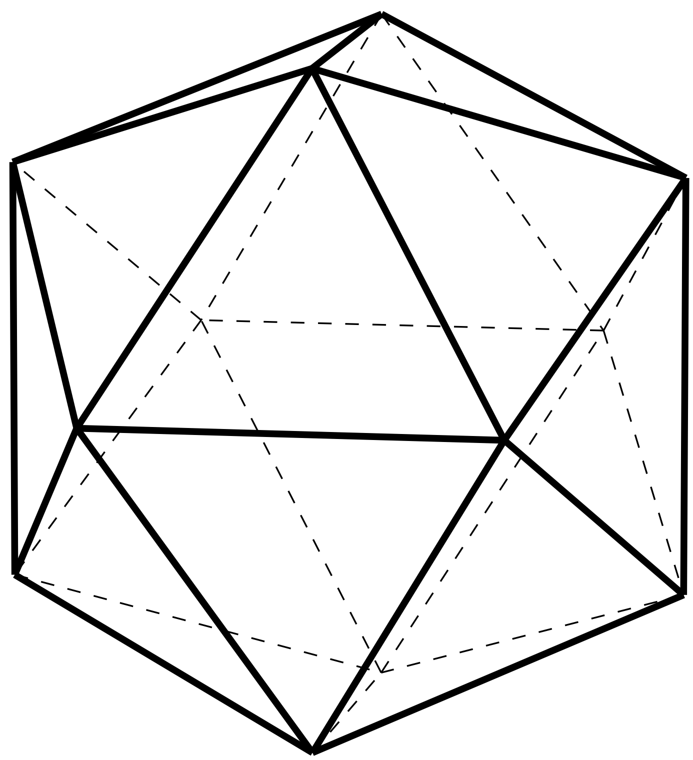
$$5^n - 3 \cdot 2^m = 1.$$

5. **(1,5 pontos)**

   Seja
$$f(x) = \cos(2\pi x) \cdot \cos\left(2\pi\left(x + \frac{1}{3}\right)\right) \cdot \cos\left(2\pi\left(x + \frac{2}{3}\right)\right).$$
   Prove que todas as soluções reais de
$$f(x) = \frac{1}{8}$$
   são racionais; encontre todas as soluções no intervalo $[0, 1]$.

6. **(1,5 pontos)**

Considere um icosaedro regular.



Sorteamos quatro vértices distintos do icosaedro.
Qual é a probabilidade de que eles estejam contidos em um plano?

7. **(2,0 pontos)**

   Temos uma longa fileira de 10001 lâmpadas, que podem estar acesas ou apagadas. Cada lâmpada tem duas vizinhas, exceto as das pontas que têm apenas uma vizinha. No instante $t = 0$ apenas a lâmpada central está acesa (o tempo é sempre medido em segundos). A cada segundo, cada lâmpada pode ser acesa ou apagada conforme a seguinte regra:

   - se dentre a lâmpada e as suas vizinhas existir pelo menos uma lâmpada acesa e uma apagada, a lâmpada será acesa;
   - se a lâmpada e as suas vizinhas estiverem *ou* todas acesas *ou* todas apagadas, a lâmpada será apagada.

   Assim, por exemplo, no instante $t = 1$ há três lâmpadas acesas (a central e suas duas vizinhas) e no instante $t = 2$ há quatro lâmpadas acesas (a central está apagada, mas suas vizinhas e as vizinas delas estão acesas).

   Mostre que no instante $t = 2013$ a lâmpada central está apagada. Determine além disso os inteiros t_0 e t_1 com $t_0 < 2013 < t_1$ tais que a lâmpada central está acesa no instante $t = t_0$, volta a estar acesa no instante $t = t_1$, mas está apagada em todo instante t inteiro, $t_0 < t < t_1$.