PUC-Rio
Desafio em Matemática
6 de outubro de 2013

Nome:______________________________________ Inscrição:____________
Assinatura:___________________________________ Identidade:___________

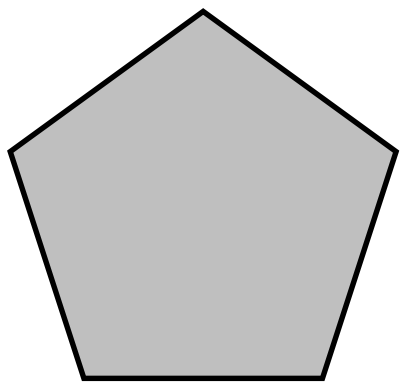
Questão	Valor	Nota	Revisão
1	1,0		
2	1,0		
3	1,5		
4	1,5		
5	1,5		
6	1,5		
7	2,0		
Nota final	10,0		

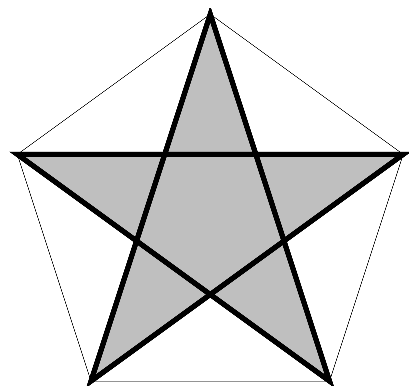
Instruções

- Mantenha seu celular completamente desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- A prova pode ser resolvida a lápis comum, caneta azul ou caneta preta.
  Use lápis ou canetas de outras cores apenas para desenhos ou diagramas.
  Você tem o direito de usar régua, compasso, esquadro e transferidor.
  Você pode usar borracha.
- Não destaque as folhas da prova.
  Caso você precise de mais rascunho, peça ao fiscal.
  Ele grampeará folhas em branco ao final da sua prova.
  Todas as folhas utilizadas devem ser grampeadas e entregues.
  Suas anotações no rascunho poderão ser usadas a seu favor.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. **(1,0 ponto)**

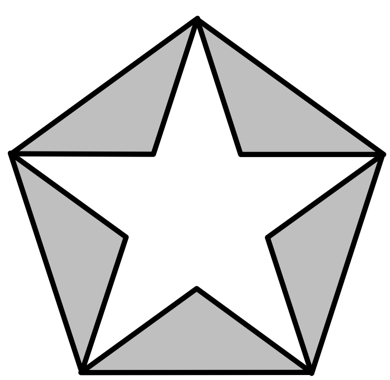
   O pentágono regular na primeira figura abaixo tem área igual a 1.
   Em um pentágono congruente ao primeiro, ligamos os vértices como na segunda figura: calcule a área da região sombreada.
   (Simplifique sua resposta; ela pode envolver raízes mas não deve envolver funções trigonométricas.)

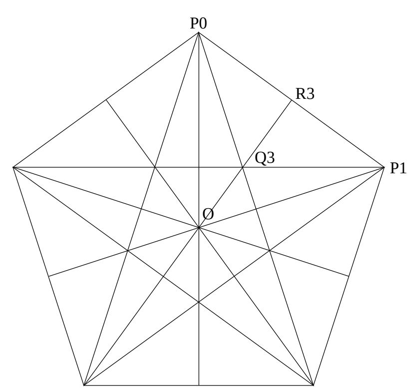




Primeira solução:

Seja $\phi = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1.6$. Sabemos que $\cos(36°) = \phi/2$.
Vamos inicialmente calcular a área do complemento da região sombreada, indicada na figura abaixo.



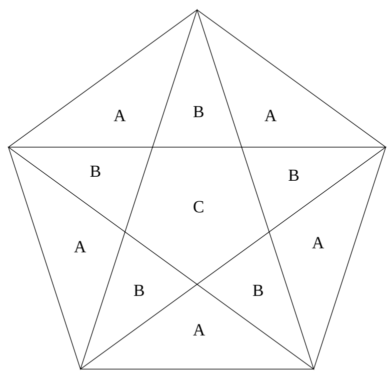


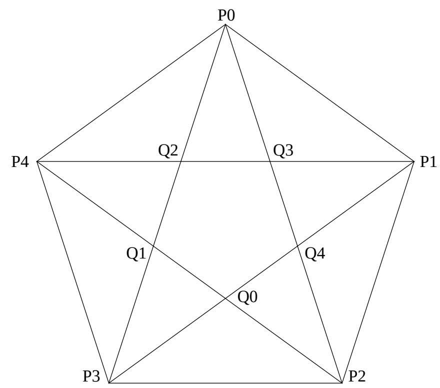
Esta área é igual à razão entre as áreas dos triângulos $P_0R_3Q_3$ e P_0R_3O, indicados acima. Como estes triângulos são retângulos de mesma base, esta razão é igual a $\tan(36°)/\tan(54°) = \tan^2(36°)$. Finalmente, a área pedida é

$$1 - \tan^2(36°) = 2 - \frac{1}{\cos^2(36°)} = 2\sqrt{5} - 4.$$

Segunda solução:

Sejam A, B e C as áreas das regiões indicadas na figura abaixo. Sejam $P_0, \ldots, P_4$ os vértices do pentágono original e $Q_0, \ldots, Q_4$ os vértices pentágono pequeno, numerados conforme a figura.





Seja $a = \overline{Q_0Q_1}$ o lado do pentágono pequeno. Temos $\overline{P_0Q_3} = \phi a$, $\overline{P_0P_1} = \phi^2 a$.

Comparando os triângulos $P_0P_1Q_3$ e $P_0Q_2Q_3$, que têm a mesma altura, temos $A = \phi B$.
Comparando os triângulos $P_0P_1P_2$ e $P_0Q_1P_2$, que são congruentes, temos $2A + B = 2B + C$ donde $C = (2\phi - 1)B$.
Assim a área desejada é igual a

$$\frac{5B + C}{5A + 5B + C} = \frac{4 + 2\phi}{4 + 7\phi} = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{15 + 7\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} - 4.$$

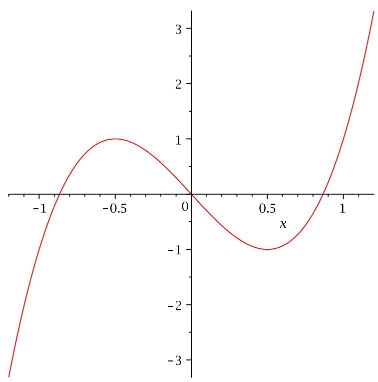
2. **(1,0 ponto)**

Seja $p(x) = 4x^3 - 3x$.
Determine quantas raízes reais distintas admite a equação

$$p(p(p(x))) = 1.$$

Primeira solução:

Temos $p(1) = p(-1/2) = 1$ e $p(-1) = p(1/2) = -1$. Assim, $p(x) - 1 = (x-1)(2x+1)^2$ e $p(x) + 1 = (x+1)(2x-1)^2$ donde $x < -1$ implica $p(x) < -1$, $x > 1$ implica $p(x) > 1$ e $-1 \le x \le 1$ implica $-1 \le p(x) \le 1$. Assim se $-1 < a < 1$, como p é um polinômio de grau 3, a equação $p(x) = a$ admite precisamente três raízes reais (simples): uma em cada intervalo $(-1, -1/2)$, $(-1/2, 1/2)$ e $(1/2, 1)$.



Já vimos que a equação $p(x) = 1$ admite as raízes reais 1 (simples) e $-1/2$ (dupla).

Temos $p(p(x)) = 1$ se e somente se $p(x) = 1$ ou $p(x) = -1/2$. Assim a equação $p(p(x)) = 1$ admite as duas raízes $x = 1$ (simples) e $x = -1/2$ (dupla), correspondentes a $p(x) = 1$ e três raízes x_1, x_2, x_3 (duplas) correspondentes a $p(x) = -1/2$.

Temos $p(p(p(x))) = 1$ se e somente se $p(x)$ assume um dos valores 1, $-1/2$, x_1, x_2 ou x_3. Ao primeiro caso correspondem as raízes 1 (simples) e $-1/2$ (dupla). A cada um dos outros quatro casos correspondem três raízes (duplas). Assim a equação $p(p(p(x))) = 1$ admite 14 raízes reais distintas: a raiz simples $x = 1$ e treze raízes duplas no intervalo $(-1, 1)$.

Segunda solução:

Temos $\cos(3t) = \cos^3(t) - 3\cos(t)\,\mathrm{sen}^2(t) = 4\cos^3(t) - 3\cos(t) = p(\cos(t))$. Assim $p(p(p(\cos(t)))) = \cos(27t)$. A equação $\cos(27t) = 1$ admite as soluções $t = 2k\pi/27$, $k \in \mathbb{Z}$, correspondentes aos 14 valores de $x = \cos(t)$ abaixo, todos raízes de $p(p(p(x))) = 1$:

$$x_0 = 1; \quad x_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{27}\right), \quad k \in \mathbb{Z} \cap [1, 13].$$

Como $-1 \le x \le 1$ implica $-1 \le p(p(p(x))) \le 1$, as raízes x_k, $1 \le k \le 13$, têm todas multiplicidade par. Isto nos dá pelo menos 27 raízes; como o grau do polinômio é igual a 27, temos todas as raízes. Assim, o número de raízes reais distintas é igual a 14.

3. **(1,5 ponto)**

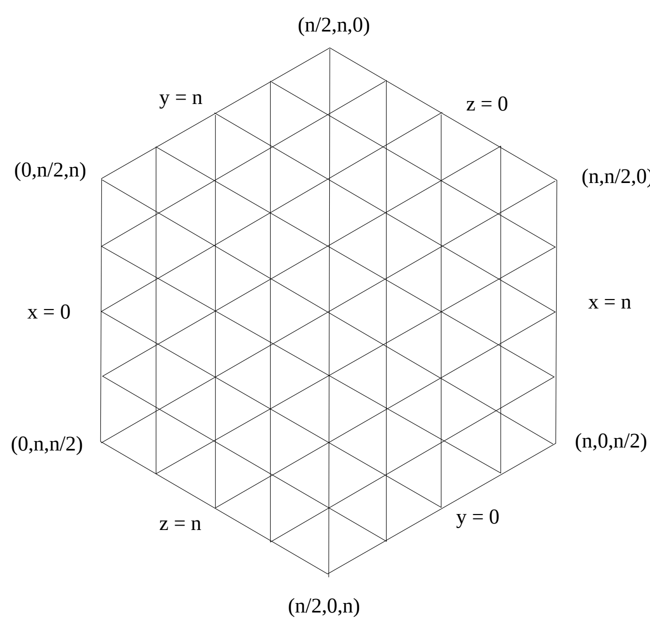
Seja n um inteiro positivo. Temos n^3 cubinhos de aresta 1. Colamos os cubinhos para fazer um grande cubo de aresta n. Escolhemos dois vértices opostos do grande cubo e consideramos o plano bissetor, i.e., o conjunto dos pontos do espaço equidistantes dos dois vértices escolhidos. Cuidadosamente serramos o grande cubo ao longo deste plano bissetor.

Determine quantos cubinhos foram serrados neste processo (sua resposta deve ser dada em função de n; separe em casos se necessário).

Solução:

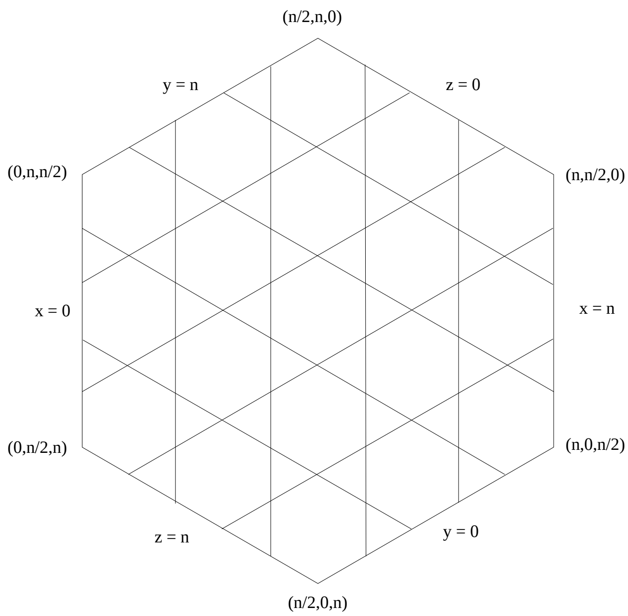
Digamos que o grande cubo seja $[0,n] \times [0,n] \times [0,n]$. Digamos que os dois vértice selecionados foram $(0,0,0)$ e (n,n,n) e que portanto o plano bissetor é $x+y+z = 3n/2$. O plano corta o grande cubo em um hexágono regular de vértices $(0,n/2,n)$, $(0,n,n/2)$, $(n/2,n,0)$, $(n,n/2,0)$, $(n,0,n/2)$, $(n/2,0,n)$. O hexágono é dividido em peças (as seções dos cubinhos) pelos planos $x=k$, $y=k$, $z=k$ onde k é um inteiro, $0 < k < n$. No plano do hexágono, estes planos se tornam retas igualmente espaçadas e paralelas aos lados do hexágono.

Vamos tratar separadamente os casos n par e n ímpar. A figura abaixo ilustra o caso $n=8$.



Para contar os cubinhos cortados devemos contar peças na figura acima. No caso par podemos ver o hexágono como dividido em três losangos grandes, cada um deles divididos em $(n/2)^2$ losangos pequenos, cada losango pequeno dividido em dois triângulos. Assim o número pedido é igual a $N(n) = 6(n/2)^2 = 3n^2/2$.

A figura abaixo ilustra o caso $n = 5$.



Para o caso ímpar usaremos indução. Claramente $N(1) = 1$ e pela figura $N(3) = 19$. Para obter a figura para $n + 2 = 2k + 1$ a partir da figura para $n = 2k - 1$, devemos acrescentar ao redor uma moldura com $6k$ hexágonos pequenos e $12k$ triângulos pequenos (sendo $6k$ na parte de dentro e $6k$ na parte de fora da moldura). Assim $N(2k + 1) = N(2k - 1) + 18k$. Assim $N(2k + 1) = 1 + 18(1 + 2 + \cdots + k) = 1 + 9k(k + 1) = 9k^2 + 9k + 1$. Assim para n ímpar, $N(n) = 9((n - 1)/2)^2 + 9((n - 1)/2) + 1 = (9n^2 - 5)/4$.

Concluindo,

$$N(n) = \begin{cases} \frac{3n^2}{2}, & n \text{ par;} \\ \frac{9n^2-5}{4}, & n \text{ ímpar.} \end{cases}$$

4. **(1,5 pontos)**

Encontre todas as soluções da equação abaixo com m e n inteiros positivos:

$$5^n - 3 \cdot 2^m = 1.$$

Solução:

Aplicando congruência módulo 3 temos $5^n \equiv 1 \pmod 3$ donde n é par. Escreva $n = 2l$: a equação fica sendo $5^{2l} - 1 = 3 \cdot 2^m$ ou

$$(5^l + 1)(5^l - 1) = 3 \cdot 2^m.$$

Assim dentre $5^l + 1$ e $5^l - 1$ um é uma potência de 2 e o outro é 3 vezes uma potência de 2, e a diferença entre eles é igual a 2. Temos

$$2 < 3 < 4 < 6 < 8 < 12 < 16 < \cdots < 2^k < 3 \cdot 2^{k-1} < 2^{k+1} < \cdots .$$

Por indução, as diferenças entre termos consecutivos são maiores ou iguais a 4 a partir de 8. Assim os únicos casos em que a diferença é igual a 2 são $(4, 6)$ e $(6, 8)$. O primeiro par dá a solução $l = 1$, $m = 3$ e $n = 2$. O segundo par não dá solução alguma pois 7 não é potência de 5. Assim a única solução é $m = 3$, $n = 2$.

5. **(1,5 pontos)**

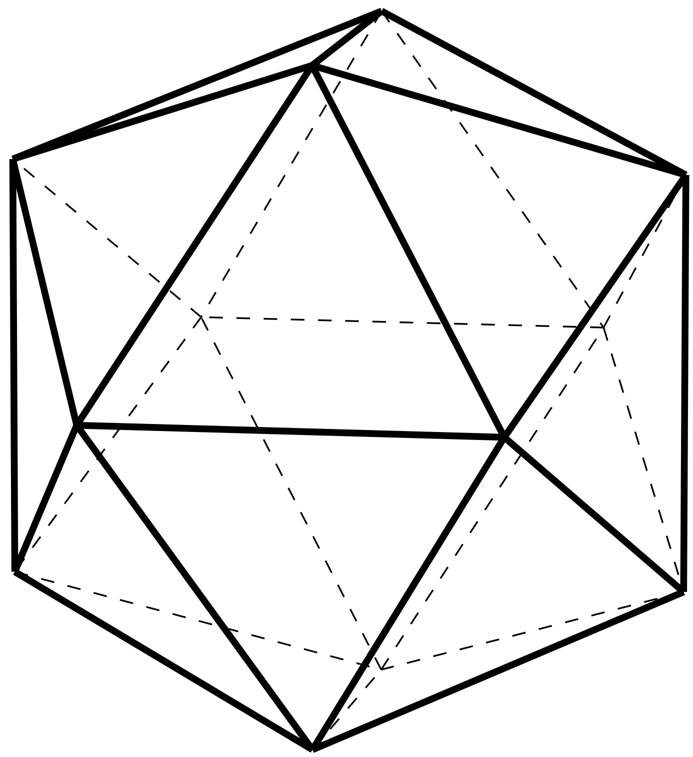
Seja
$$f(x) = \cos(2\pi x) \cdot \cos\left(2\pi\left(x + \frac{1}{3}\right)\right) \cdot \cos\left(2\pi\left(x + \frac{2}{3}\right)\right).$$
Prove que todas as soluções reais de
$$f(x) = \frac{1}{8}$$
são racionais; encontre todas as soluções no intervalo $[0, 1]$.

Solução:

Vamos provar que
$$f(x) = \frac{1}{4}\cos(6\pi x).$$
Dado $x \in \mathbb{R}$, sejam z e ω os números complexos
$$z = \cos(2\pi x) + i\,\mathrm{sen}(2\pi x), \qquad \omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
Note que
$$\begin{aligned}
\cos(2\pi x) &= \frac{z + z^{-1}}{2}, \\
\cos\left(2\pi\left(x + \frac{1}{3}\right)\right) &= \frac{\omega z + \omega^{-1} z^{-1}}{2}, \\
\cos\left(2\pi\left(x + \frac{2}{3}\right)\right) &= \frac{\omega^{-1} z + \omega z^{-1}}{2}.
\end{aligned}$$
Assim temos
$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{8}(z + z^{-1})(\omega z + \omega^{-1} z^{-1})(\omega^{-1} z + \omega z^{-1}) \\
&= \frac{1}{8}\left(z^3 + (1 + \omega + \omega^{-1})z + (1 + \omega + \omega^{-1})z^{-1} + z^{-3}\right) \\
&= \frac{1}{4}\,\frac{z^3 + z^{-3}}{2} = \frac{1}{4}\cos(6\pi x).
\end{aligned}$$
Estamos portanto interessados nas soluções da equação
$$\cos(6\pi x) = \frac{1}{2}$$
que são
$$x = \pm\frac{1}{18} + \frac{k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z},$$
claramente todas racionais. As soluções no intervalo $[0, 1]$ são
$$\frac{1}{18}, \frac{5}{18}, \frac{7}{18}, \frac{11}{18}, \frac{13}{18}, \frac{17}{18}.$$

6. **(1,5 pontos)**

Considere um icosaedro regular.



Sorteamos quatro vértices distintos do icosaedro.
Qual é a probabilidade de que eles estejam contidos em um plano?

Solução:

O icosaedro tem 12 vértices. Vamos selecionar um sobconjunto com 4 elementos. Temos assim um total de $\binom{12}{4} = 495$ casos possíveis.

Um caso favorável (ou seja, com 4 vértices em um plano) é o de que os quatro vértices estejam sobre um dos pentágonos formados pelos vértices vizinhos a um vértice dado. O icosaedro tem 12 vértices logo também 12 tais pentágonos. Para cada pentágono temos 5 possibilidades (5 vértices que podem ser omitidos). Isto nos dá portanto 60 casos.

Outro caso favorável é o de que os quatro vértices estejam sobre duas arestas opostas. O icosaedro tem 30 arestas e portanto 15 pares de arestas opostas. Isto nos dá portanto mais 15 casos.

Afirmamos que estes são os únicos casos favoráveis. De fato, se os dois primeiros vértices forem vizinhos, os planos definidos por um terceiro vértice são ou uma face (que não vale, pois não admite um quarto vértice), ou um pentágono (recaindo no primeiro cenário) ou um par de arestas opostas (recaindo no segundo cenário). Finalmente, qualquer conjunto de quatro vértices inclui dois vértices vizinhos. De fato, se começarmos a tentar construir um contra-exemplo com dois vértices opostos ficaremos sem jogada para o terceiro vértice. Se por outro lado começarmos com dois vértices a distância 2 (i.e., nem vizinhos nem opostos), só restam agora dois vértices vizinhos.

Assim a resposta é

$$\frac{75}{495} = \frac{5}{33}.$$

7. **(2,0 pontos)**

   Temos uma longa fileira de 10001 lâmpadas, que podem estar acesas ou apagadas. Cada lâmpada tem duas vizinhas, exceto as das pontas que têm apenas uma vizinha. No instante $t = 0$ apenas a lâmpada central está acesa (o tempo é sempre medido em segundos). A cada segundo, cada lâmpada pode ser acesa ou apagada conforme a seguinte regra:

   - se dentre a lâmpada e as suas vizinhas existir pelo menos uma lâmpada acesa e uma apagada, a lâmpada será acesa;
   - se a lâmpada e as suas vizinhas estiverem *ou* todas acesas *ou* todas apagadas, a lâmpada será apagada.

   Assim, por exemplo, no instante $t = 1$ há três lâmpadas acesas (a central e suas duas vizinhas) e no instante $t = 2$ há quatro lâmpadas acesas (a central está apagada, mas suas vizinhas e as vizinhas delas estão acesas).

   Mostre que no instante $t = 2013$ a lâmpada central está apagada. Determine além disso os inteiros t_0 e t_1 com $t_0 < 2013 < t_1$ tais que a lâmpada central está acesa no instante $t = t_0$, volta a estar acesa no instante $t = t_1$, mas está apagada em todo instante t inteiro, $t_0 < t < t_1$.

   Solução:

   Afirmamos que para $t < 5000$, a lâmpada central acende precisamente para t da forma $2^k - 1$, ou seja, para

   $$t = 0, 1, 3, 7, \ldots, 1023, 2047, \ldots;$$

   assim a lâmpada central está apagada para $t = 2013$ e $t_0 = 1023$ e $t_1 = 2047$ são os valores pedidos no enunciado.

   Seja t o tempo medido em segundos, sempre suposto inteiro. Seja

   $$s \in S = \mathbb{Z} \cap [-5000, +5000] = \{-5000, \cdots, -1, 0, +1, \cdots, +5000\}$$

   o número de uma lâmpada, onde a lâmpada central corresponde a $s = 0$, suas vizinhas a $s = \pm 1$ e assim por diante. Seja $F : \mathbb{N} \times S \to \{0, 1\}$ uma função que descreve o estado das lâmpadas: $F(t, s) = 1$ se no instante t a lâmpada s estiver acesa e $F(t, s) = 0$ se estiver apagada. Façamos uma tabela de valores de F.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\
\cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

Podemos observar que para $t = 2^k - 1$ (com $k > 0$) temos todas as lâmpadas entre $s = -t$ e $s = t$ acesas. Estes são os únicos tempos t, $1 < t < 5000$, para os quais a lâmpada central está acesa. Para $t = 2^k$ temos exatamente quatro lâmpadas acesas, correspondentes a $s = \pm 2^k, \pm(2^k - 1)$. Estas afirmações resolvem o problema e podem ser demonstradas por indução. Para termos uma demonstração mais rigorosa e mais completa, entretanto, vamos apresentar uma fórmula para F.

Seja

$$
\operatorname{sinal}(s) = \begin{cases} +1, & s \geq 0; \\ -1, & s < 0; \end{cases} \qquad \tilde{s} = \begin{cases} s, & s \equiv t \pmod 2; \\ s + \operatorname{sinal}(s), & s \not\equiv t \pmod 2; \end{cases}
$$

$$
u = \frac{t + \tilde{s}}{2}, \qquad \tilde{F}(t, s) = \binom{t}{u} \bmod 2.
$$

Afirmamos que $F(t, s) = \tilde{F}(t, s)$ para todo $t < 5000$, ou seja, a função $\tilde{F}$ acima respeita as regras do enunciado. Demonstraremos esta afirmação por indução em t. Para $t = 0$ temos $\tilde{F}(t, s) = 1$ apenas para $s = 0$, consistentemente com o enunciado. Também é fácil (e não de todo necessário) verificar que para $t = 1$ temos $\tilde{F}(t, s) = 1$ apenas para $s = 0, \pm 1$ e que para $t = 2$ temos $\tilde{F}(t, s) = 1$ apenas para $s = \pm 1, \pm 2$. Para decidir o estado de (t, s) devemos examinar os estados de $(t - 1, s - 1)$, $(t - 1, s)$ e $(t - 1, s + 1)$. Por indução, estes três últimos estados correspondem a $\binom{t-1}{u-1} \bmod 2$ e $\binom{t-1}{u} \bmod 2$ (dois dentre os três sendo iguais): a relação $\binom{t}{u} = \binom{t-1}{u-1} + \binom{t-1}{u}$ completa a demonstração de que $F(t, s) = \tilde{F}(t, s)$ para todo $t < 5000$.

Basta portanto provar que, para $t > 0$, a posição central $\binom{t}{\lceil t/2 \rceil}$ da t-ésima linha do triângulo de Pascal é ímpar se e somente se t é da forma $2^k - 1$. Isto segue do fato que $\binom{a}{b}$ é ímpar se e somente se a expansão binária de b estiver contida na expansão binária de a, mas para tornar esta solução mais autocontida não usaremos este resultado.

Observe inicialmente que se $t > 0$ for par, esta é a única entrada sem outra igual na soma

$$\sum_k \binom{t}{k} = 2^t,$$

logo par. Supondo $t = 2k - 1$ ímpar, queremos estimar o número m de fatores 2 em

$$\binom{t}{\lceil t/2 \rceil} = \frac{(2k-1)!}{k!\,(k-1)!}.$$

Recorde que o número de fatores 2 na fatoração de $n!$ é

$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2^2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2^3} \rfloor + \cdots .$$

Assim

$$\begin{aligned} m &= \left(\lfloor k-1 \rfloor + \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{k-1}{4} \rfloor + \cdots \right) \\ &\quad - \left(\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{k-1}{4} \rfloor + \cdots \right) - \left(\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + \lfloor \frac{k}{4} \rfloor + \cdots \right) \\ &= (k-1) - \left(\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + \lfloor \frac{k}{4} \rfloor + \cdots \right) \\ &= (-1) + \left(\frac{k}{2} - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor \right) + \left(\frac{k}{4} - \lfloor \frac{k}{4} \rfloor \right) + \cdots \\ &= (-1) + \{\frac{k}{2}\} + \{\frac{k}{4}\} + \cdots = (-1) + \sum_{j \geq 1} \{\frac{k}{2^j}\}, \end{aligned}$$

onde $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ é a parte fracionária de x. Se $k = 2^l$ temos

$$\{\frac{k}{2^j}\} = \begin{cases} 0, & j \leq l, \\ \frac{1}{2^{j-l}}, & j > l, \end{cases}$$

donde $m = 0$ Se $2^l < k < 2^{l+1}$ temos

$$m > (-1) + \sum_{j > l} \frac{k}{2^j} > 0,$$

completando a demonstração.