PUC-Rio
Olimpíada Relâmpago
Data: 28 de abril de 2006
Gabarito

1. Uma melancia de massa 10 kg contém 99% de água. Após deixá-la aberta por algum tempo, um agricultor verificou que um pouco de água havia evaporado, deixando-a com 98% de água. Qual a massa da melancia (ou do que sobrou da melancia) após a evaporação?

   Solução:

   No início do problema, a melancia consiste de 9.9 kg de água e 0.1 kg de outras substâncias. No final do problema ela tem uma massa M e os 0.1 kg de outras substâncias agora correspondem a 2% da massa total, ou seja,

   $$\frac{2M}{100} = 0,1$$

   donde M é 5 kg.

   Este problema caiu na primeira fase de alguma OBM (desculpem, não sei qual!); quase todo ano cai uma variante do problema na primeira fase da OBM.

2. Calcule
$$\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \cdots + \frac{199}{99^2 \cdot 100^2}.$$

Solução:

Temos

$$\begin{aligned}
\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} &= 1 - \frac{1}{2^2} \\
\frac{5}{2^2 \cdot 3^2} &= \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \\
\frac{7}{3^2 \cdot 4^2} &= \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \\
&\cdots \\
\frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2} &= \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \\
&\cdots \\
\frac{199}{99^2 \cdot 100^2} &= \frac{1}{99^2} - \frac{1}{100^2}
\end{aligned}$$

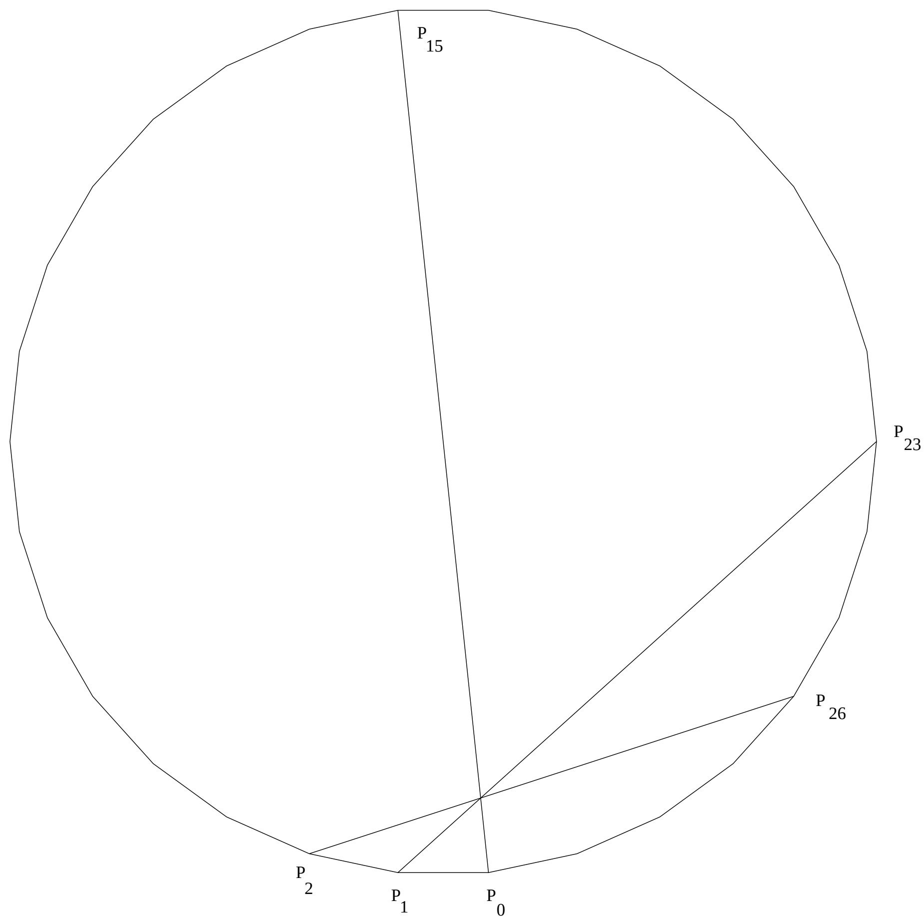
donde a soma S do problema vale

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots - \frac{1}{100^2} =$$

$$= 1 - -\frac{1}{100^2} = \frac{9999}{10000}.$$

Isto é o que se chama uma *soma telescópica*.

3. Seja $P_0P_1 \cdots P_{29}$ um polígono regular de 30 lados. Prove que as diagonais P_0P_{15}, P_1P_{23} e P_2P_{26} são concorrentes.



Solução: Existem várias soluções possíveis para este problema: apresentaremos duas. A primeira usa geometria analítica e números complexos; é um pouco trabalhosa mas não exige muita criatividade. A segunda usa apenas geometria elementar mas é bem mais sutil.

Podemos supor que $P_n = (\cos na, \operatorname{sen} na)$ onde $a = \pi/15$. A diagonal P_0P_{15} é o eixo x. As outras duas diagonais têm equações

$$\begin{aligned}(\cos 3a)x - (\operatorname{sen} 3a)y - (\cos 4a) &= 0,\\ (\cos a)x - (\operatorname{sen} a)y - (\cos 3a) &= 0.\end{aligned}$$

Assim, para provar que a interseção destas retas está sobre o eixo x basta provar que $D = \cos^2 3a - \cos a \cos 4a = 0$.

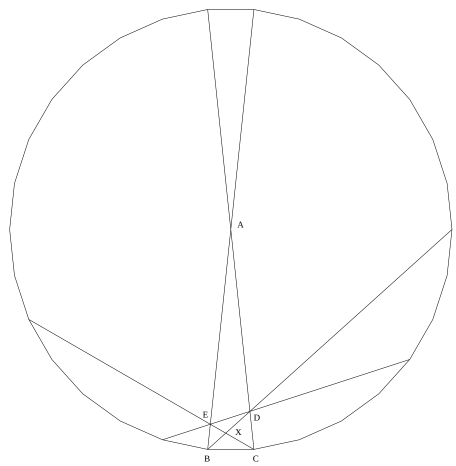
Seja $z = \cos a + i \operatorname{sen} a$. Temos

$$\begin{aligned}0 &= \frac{(z^{30}-1)(z^5-1)(z^3-1)(z^2-1)}{(z^{15}-1)(z^{10}-1)(z^6-1)(z-1)}\\ &= z^8 + z^7 - z^5 - z^4 - z^3 + z + 1.\end{aligned}$$

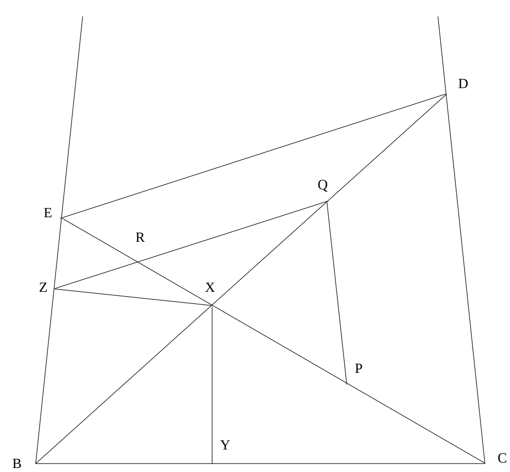
Por outro lado,

$$\begin{aligned}4D &= ((z^3 + z^{-3})^2 - (z + z^{-1})(z^4 + z^{-4})\\ &= z^{-6}(z^12 - z^11 - z^9 + 2z^6 - z^3 - z + 1)\\ &= z^{-6}(z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1)(z^8 + z^7 - z^5 - z^4 - z^3 + z + 1)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Sejam A o centro do polígono, $B = P_1$ e $C = P_0$. Sejam D a interseção de $AC = P_0P_{15}$ com P_1P_{23} e E a interseção de $AB = P_1P_{16}$ com P_0P_6. Observe que, por simetria na reta AB, P_2P_{26} passa por E. Devemos provar que P_2P_{26} também passa por D. Equivalentemente, precisamos verificar que $BDE = 24°$. Note que $BCA = CBA = 84°$, $CBD = DBA = 42°$, $BCE = 30°$.



Seja X o ponto de interseção de BD e CE. Temos $XCD = XDC = 54°$, assim $XC = XD$. Trace perpendiculares XY e XZ a BC e BE, respectivamente. Sejam P e Q os pontos médios de XC e XD, respectivamente. Seja R a interseção de XE e QZ.



O círculo XYC tem centro P donde $XQ = XP = XY = XZ$ e portanto XQZ é isósceles. Como $BXZ = 48°$ temos $XQZ = XZQ = 24°$. Mas $EXZ = 24°$, donde RXZ é isósceles e, como EZX é reto, R é o centro do círculo EXZ. Assim R é o ponto médio de EX e portanto DE é paralela a QZ e $BDE = XQZ = 24°$.

4. Temos quatro baterias carregadas, quatro baterias descarregadas e um rádio que necessita de duas baterias para funcionar. Supondo que não sabemos quais baterias estão carregadas e quais descarregadas, determine se é possível fazer o rádio funcionar com no máximo oito tentativas. Uma tentativa consiste em colocar duas baterias no rádio e verificar se ele, então, funciona.

   Solução:

   Sim, é possível, e de muitas formas diferentes. Na verdade é possível resolver o problema com apenas *sete* tentativas. Chamemos as baterias de A, B, C, D, E, F, G, H; teste os pares

   $$AB, AC, BC, DE, DF, EF, GH.$$

   Se houver mais de uma bateria carregada dentre A, B, C, teremos resolvido o problema numa das três primeiras tentativas. Analogamente, se houver mais de uma bateria carregada dentre D, E, F, teremos resolvido o problema numa das seis primeiras tentativas. Assim, só vamos para a sétima tentativa se houver *no máximo* uma bateria carregada dentre A, B, C e *no máximo* uma bateria carregada dentre D, E, F: como temos quatro baterias carregadas isto obriga G, H a estarem it ambas carregadas, resolvendo o problema na sétima tentativa.

   É impossível, entretanto, resolver o problema com seis tentativas. Este foi o problema 4 da terceira fase da XXVI OBM (2005), nível 3 (ensino médio).