

PUC-Rio
Olimpíada Relâmpago — Gabarito
Data: 27 de abril de 2007

1. Uma melancia de massa 10 kg contém 99% de água. Após deixá-la aberta por algum tempo, um agricultor verificou que um pouco de água havia evaporado, deixando-a com 98% de água. Qual a massa da melancia (ou do que sobrou da melancia) após a evaporação?

Solução: A massa de não-água corresponde a 1% da massa inicial de 10 kg e portanto é de 100 g. A mesma massa corresponde a 2% da massa final donde a massa final é de 5 kg.

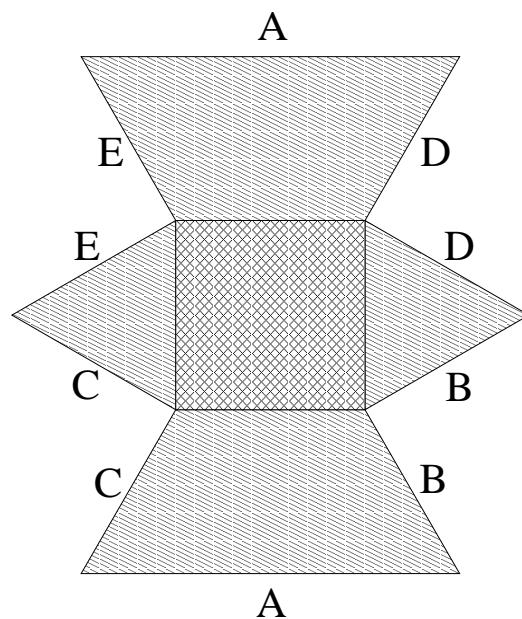
2. Num tabuleiro retangular de 13 linhas e 17 colunas escrevemos números em cada casinha da seguinte maneira. Primeiro, com caneta azul, numeramos as casinhas da primeira linha, da esquerda para a direita, com os números 1, 2, 3, ..., 17, nessa ordem; depois numeramos a segunda linha, também da esquerda para a direita, com os números de 18 a 34, e assim por diante. Após preencheremos todo o tabuleiro, escrevemos em cada casinha um segundo número, agora com caneta vermelha, numerando as casinhas da primeira coluna, de cima para baixo, com os números 1, 2, 3, ..., 13, nessa ordem, depois numeramos a segunda coluna, também de cima da baixo, com os números de 14 a 26, e assim por diante. Deste modo, cada casinha tem dois números: um azul e um vermelho. Quantas casinhas têm dois números iguais?

Solução: Numere as linhas por $i = 1, 2, \dots, 13$ e as colunas por $j = 1, 2, \dots, 17$. O número azul na casinha (i, j) é $17i + j - 17$ e o número vermelho é $i + 13j - 13$. Queremos contar as casinhas para as quais $17i + j - 17 = i + 13j - 13$ ou $4(i - 1) = 3(j - 1)$. Podemos escrever $i - 1 = 3k$, $j - 1 = 4k$ e isso dá uma casinha válida para $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Temos portanto 5 casinhas.

3. Dois cubos têm faces pintadas de preto ou branco. O primeiro cubo tem cinco faces pretas e uma face branca. Quando os dois cubos são lançados, a probabilidade de as faces viradas para cima dos dois cubos serem da mesma cor é $1/2$. Quantas faces pretas tem o segundo cubo?

Solução: Se o segundo cubo tiver k faces pretas então a probabilidade de as faces viradas para cima dos dois cubos serem pretas é $5k/36$ e a probabilidade de serem ambas brancas é $(6 - k)/36$. Assim $5k + 6 - k = 18$ e $k = 3$.

4. A figura abaixo é recortada e usada para montar um sólido colando as faces como indicado. O quadrado tem lado 1, os triângulos são equiláteros, os trapézios são isósceles e têm base maior igual a 2. Calcule o volume do sólido.



Solução: O sólido é a metade de um tetraedro regular de aresta 2. Um tetraedro regular T de aresta ℓ tem área da base igual a $B_T = \frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$ e altura $h_T = \frac{\sqrt{6}}{3}\ell$ donde tem volume $V_T = \frac{B_T h_T}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}\ell^3$. Assim o volume do sólido do problema é $V = \frac{\sqrt{2}}{24}\ell^3$ para $\ell = 2$ ou

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$