PUC-Rio
PUC por um dia — Olimpíada Relâmpago
Data: 13 de abril de 2011
Gabarito

1. Jorge quer sortear um número entre 3 e 18. Para isso ele joga quatro dados comuns (com seis faces numeradas de 1 a 6), ignora o menor resultado e soma os outros três. Assim, por exemplo, se os dados saem ⚄⚂⚂⚃ então o número sorteado é $5 + 3 + 4 = 12$.

   Qual é a probabilidade de que o número sorteado seja igual a 18?

   Solução:

   Há no total 6^4 resultados possíveis para os dados. Para que o número sorteado seja 18, devemos tirar três ou quatro ⚅.

   Há exatamente uma possibilidade de tirar quatro ⚅:

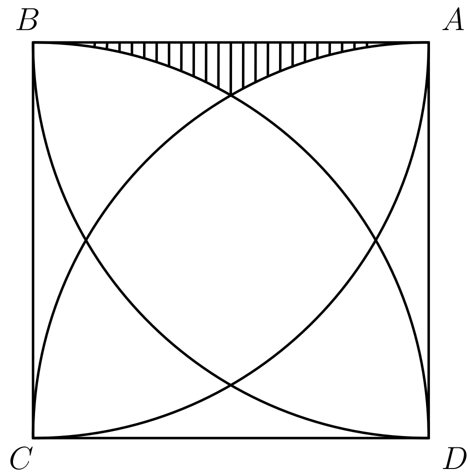
   ⚅⚅⚅⚅.

   Há exatamente vinte maneiras de tirar três ⚅:

   ⚀⚅⚅⚅, ⚁⚅⚅⚅, ⚂⚅⚅⚅, ⚃⚅⚅⚅, ⚄⚅⚅⚅,
   ⚅⚀⚅⚅, ⚅⚁⚅⚅, ⚅⚂⚅⚅, ⚅⚃⚅⚅, ⚅⚄⚅⚅,
   ⚅⚅⚀⚅, ⚅⚅⚁⚅, ⚅⚅⚂⚅, ⚅⚅⚃⚅, ⚅⚅⚄⚅,
   ⚅⚅⚅⚀, ⚅⚅⚅⚁, ⚅⚅⚅⚂, ⚅⚅⚅⚃, ⚅⚅⚅⚄.

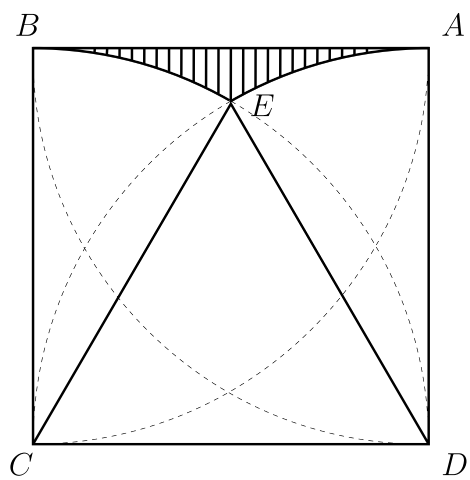
   Assim há no total 21 maneiras de sortear o número 18 e a probabilidade desejada é igual a $21/6^4 = 7/432$.

2. Seja $ABCD$ um quadrado de lado 1. Trace círculos de raio 1 com centro em cada um dos quatro vértices. Determine a área da região interior ao quadrado, interior aos círculos de centros A e B mas exterior aos círculos de centros C e D (indicada na figura).



Solução:

Seja E o ponto de interseção entre os círculos de centros C e D que fica dentro do quadrado.



O triângulo CDE é equilátero donde os ângulos ADE e BCE são iguais a $\pi/6$ (ou 30 graus). Decompondo o quadrado como na figura acima, o triângulo CDE tem área $\sqrt{3}/4$ e as fatias de círculo ADE e BCE tem área $\pi/12$ cada. Assim a área desejada é igual a

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}.$$

3. Quatro amigos, Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo e Dernaldo estão jogando cartas com um baralho comum de 52 cartas. Lembre que o baralho tem 13 cartas de cada naipe (espadas, copas, paus e ouros); as cartas de espadas e paus são pretas e as de copas e ouros são vermelhas; para cada naipe há cartas numeradas de 2 a 10, além de um valete (J), uma dama (Q), um rei (K) e um ás (A). Cada amigo recebe treze cartas, de modo que todas as cartas são distribuídas. Eles fazem as seguintes afirmações:

   Arnaldo: *Eu tenho quatro valetes.*

   Bernaldo: *Eu tenho todas as cartas de ouros.*

   Cernaldo: *Todas as minhas cartas são vermelhas.*

   Dernaldo: *Eu tenho três ases e dois reis.*

   Sabe-se que exatamente uma das afirmações é falsa. Quem fez essa afirmação?

   Solução:

   As afirmações de **A** e **B** são incompatíveis: se **A** tiver os quatro valetes, tem o valete de ouros e portanto **B** não pode ter todas as cartas de ouros.

   Se **A** tiver feito a afirmação falsa, as afirmações **B**, **C** e **D** são verdadeiras. Mas isto significa que **C** tem todas as cartas de copas e portanto **D** não pode ter três ases, contradição. Assim **B** deve ter feito a afirmação falsa.

   Falta talvez verificar que as afirmações de **A**, **C** e **D** são consistentes (com **B** falsa). Uma solução é:

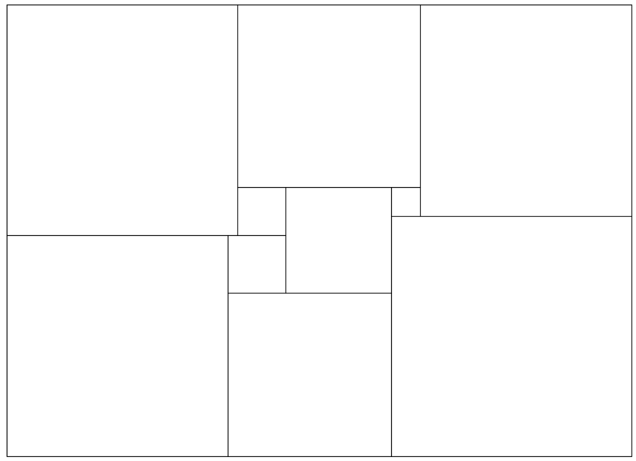
   Cernaldo: $2\heartsuit$, $2\diamondsuit$, $3\heartsuit$, $3\diamondsuit$, $4\heartsuit$, $4\diamondsuit$, $5\heartsuit$, $5\diamondsuit$, $6\heartsuit$, $6\diamondsuit$, $7\heartsuit$, $7\diamondsuit$, $8\heartsuit$.

   Arnaldo: $J\spadesuit$, $J\heartsuit$, $J\clubsuit$, $J\diamondsuit$ e mais 9 cartas.

   Dernaldo: $A\spadesuit$, $A\heartsuit$, $A\clubsuit$, $K\spadesuit$, $K\heartsuit$ e mais 8 cartas.

   Bernaldo: $A\diamondsuit$, $K\clubsuit$, $K\diamondsuit$ e mais 10 cartas.

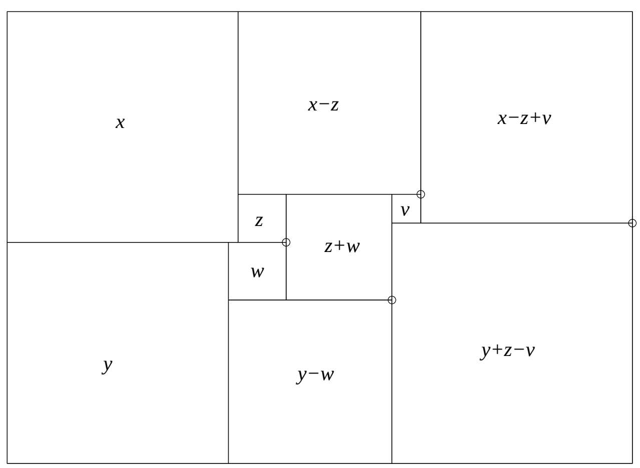
4. A figura mostra um retângulo decomposto como a união disjunta de 10 quadrados de lados diferentes.



Determine a razão entre os lados do retângulo.

Solução:

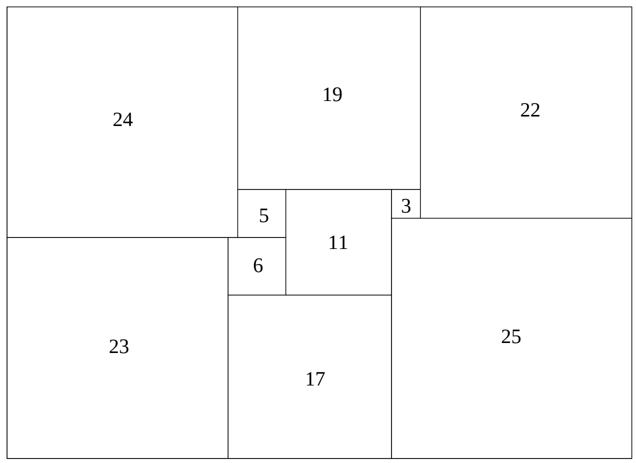
Escolhemos alguns quadrados e damos nomes a seus lados, conforme a figura.



Trabalhando da esquerda para a direita, deduzimos os lados dos demais quadrados. Em algumas situações descobrimos identidades. Por exemplo, ao chegar ao primeiro cruzamento indicado por um círculo, descobrimos que $x + z = y + w$. No segundo descobrimos que $z + 2w = y - w$; no terceiro, que $x - z = 2z + w + v$; no quarto; que $x - z + 2v = y + z - v$.

Da última equação temos $y = x - 2z + 3v$; da penúltima que $x = 3z + w + v$ e portanto $y = z + w + 4v$. Substituindo nas duas primeiras temos

$4z + w + v = z + 2w + 4v$ e $z + 2w = z + 4v$. Esta última equação nos dá $w = 2v$ e portanto, substituindo na outra, $4z + 3v = z + 8v$ donde $3z = 5v$. Fazendo $v = 3t$ e $z = 5t$ temos $w = 6t$, $x = 24t$ e $y = 23t$. Com isso descobrimos (a menos de um fator constante) os lados de todos os quadrados.



Assim os lados do retângulo são $47t$ e $65t$. A razão pedida entre os lados é $47/65$.