

PROFMAT — MA11 — PUC-Rio

31 de março de 2012

O teste deve ser feita individualmente, sem consulta.

Todas as questões têm o mesmo valor.

1. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa; justifique.

(a) Se $|5x - 13| < 1$ então $|2x - 5| < 1$.

(b) Se $\frac{x+1}{2x-1} < 1$ então $x + 1 < 2x - 1$.

(c) Seja I_0 um intervalo fechado e limitado
(que não é vazio nem consiste de um único ponto)
e seja I_1 um intervalo aberto e limitado com $I_0 \subset I_1$.
Então existe um intervalo aberto (e não vazio) I_2 com
 $I_2 \subset I_1$ e $I_2 \cap I_0 = \emptyset$.

2. Seja $g_0 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $g_0(x) = x$. Defina $g_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ por

$$g_1(x) = \begin{cases} \frac{g_0(3x)}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}, \\ \frac{g_0(3x-2)+1}{2}, & \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Analogamente, defina $g_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ e $g_3 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ por

$$g_2(x) = \begin{cases} \frac{g_1(3x)}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}, \\ \frac{g_1(3x-2)+1}{2}, & \frac{2}{3} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$g_3(x) = \begin{cases} \frac{g_2(3x)}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}, \\ \frac{g_2(3x-2)+1}{2}, & \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

(a) Calcule $g_3(\frac{1}{4})$.

(b) Encontre todas as soluções de $g_3(x) = \frac{2}{5}$.

(c) Encontre o valor máximo de $|g_3(x) - x|$.