# PROFMAT — MA11 — PUC-Rio

## 16 de março de 2013

O teste deve ser feita individualmente, sem consulta.
Todas as questões têm o mesmo valor.

1. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa; justifique.
   (a) Se $n$ é um inteiro ímpar então
   $$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+4} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+6}.$$
   (b) Para qualquer inteiro positivo $k$, o número de soluções inteiras de $10k < |5x - 3| < 20k$ é par.
   (c) Sejam $I_0$ e $I_1$ intervalos fechados, limitados e não triviais (ou seja, que não sejam vazios nem consistam de um único ponto).
   Se $I_0 \cap I_1 = \emptyset$ então existe um intervalo fechado, limitado e não trivial $I_{1/2}$ com a seguinte propriedade:
   se $x_0 \in I_0$, $x_{1/2} \in I_{1/2}$ e $x_1 \in I_1$ então $(x_1 - x_{1/2})(x_{1/2} - x_0) > 0$.

2. Seja $g_0 : [0,1] \to [0,1]$, $g_0(x) = x$. Defina $g_1 : [0,1] \to [0,1]$ por
   $$g_1(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 \le x \le \frac{2}{3}, \\ 2x - 1, & \frac{2}{3} \le x \le 1. \end{cases}$$
   Analogamente, defina $g_2 : [0,1] \to [0,1]$ e $g_3 : [0,1] \to [0,1]$ por
   $$g_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}\, g_1\left(\frac{3}{2}x\right), & 0 \le x \le \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\, g_1\left(3x - 2\right), & \frac{2}{3} \le x \le 1. \end{cases}$$
   $$g_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}\, g_2\left(\frac{3}{2}x\right), & 0 \le x \le \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\, g_2\left(3x - 2\right), & \frac{2}{3} \le x \le 1. \end{cases}$$
   (a) Calcule $g_3(\frac{1}{2})$.
   (b) Encontre todas as soluções de $g_3(x) = \frac{1}{4}$.
   (c) Para $0 < x_0 < x_1 < 1$, encontre o valor máximo de
   $$\frac{g_3(x_1) - g_3(x_0)}{x_1 - x_0}.$$