

PROFMAT — PUC-Rio

22 de janeiro de 2014

O teste deve ser feito individualmente, sem consulta.

Todas as questões têm o mesmo valor.

1. Prove que a equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2^{2014} + 7$$

não admite solução inteira (ou seja, com $x, y, z \in \mathbb{Z}$).

2. Considere duas progressões aritméticas (a_n) e (b_n) com

$$a_0 = 13, a_1 = 27, b_0 = 9, b_1 = 15.$$

Encontre o menor inteiro maior do que 1000 que pertence à interseção das imagens das duas progressões.

3. (a) Prove que se $N > 0$ é inteiro, p é primo e p é divisor de $4N^2 + 1$ então p é da forma $4k + 1$.
(b) Prove que existem infinitos primos da forma $4k + 1$.