

PROFMAT — MA11 — PUC-Rio

15 de março de 2014

O teste deve ser feita individualmente, sem consulta.

Todas as questões têm o mesmo valor.

1. Seja X um conjunto qualquer. Seja

$$Y = \mathcal{P}(X) = \{Z \mid Z \subseteq X\}$$

o conjunto das partes de X .

(a) Exiba uma função injetora $f : X \rightarrow Y$.

(b) Mostre que não existe função sobrejetora $g : X \rightarrow Y$.

2. Prove por indução que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Encontre constantes a , b e c tais que, para todo inteiro positivo n ,

$$1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = (an + b) \cdot 2^n + c;$$

demonstre por indução que a identidade acima sempre vale.