

PROFMAT — PUC-Rio

24 de janeiro de 2014

O teste deve ser feito individualmente, sem consulta.

Todas as questões têm o mesmo valor.

1. Seja

$$p(x) = \frac{18}{77}x^{11} - \frac{1}{7}x^5 - \frac{1}{11}x.$$

Prove que para todo  $x \in \mathbb{Z}$  temos  $p(x) \in \mathbb{Z}$ .

2. Sejam  $N$  e  $k$  inteiros positivos. Seja

$$M = (2N)^{(2^k)} + 1.$$

Seja  $p$  um fator primo de  $M$ . Prove que

$$p \equiv 1 \pmod{2^{k+1}}.$$

3. Para um inteiro positivo  $n$ , seja  $d(n)$  o número de divisores inteiros positivos de  $n$ .

(a) Encontre o menor inteiro positivo  $n$  com  $d(n) = 15$ .

(b) Determine o maior valor possível para  $d(n)$  com  $n$  restrito a  $1 \leq n \leq 100$ .