

PROFMAT — PUC-Rio

27 de janeiro de 2014

O teste deve ser feito individualmente, sem consulta.

Todas as questões têm o mesmo valor.

- (a) Prove que todo primo $p > 3$ ou é da forma $p = 6k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) ou é da forma $p = 6k - 1$.

(b) Diga se a afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa; justifique.
Para todo inteiro positivo k pelo menos um dentre números $6k - 1$ e $6k + 1$ é primo.
- Seja N um inteiro positivo e seja $M = (6N)^2 + 6N + 1$. Seja p um fator primo de M . Prove que p é da forma $6k + 1$.
- Seja $p > 2$ primo. Seja

$$N = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (p-2) = \frac{(p-1)!}{2^{\frac{p-1}{2}} \cdot \left(\frac{p-1}{2}\right)!}.$$

Prove que

$$N^2 \equiv \pm 1 \pmod{p}.$$