

PROFMAT — MA11 — PUC-Rio

26 de maio de 2012

O teste deve ser feito individualmente, sem consulta.

Todas as questões têm o mesmo valor.

1. O objetivo desta questão é demonstrar de forma elementar algumas estimativas. Não use estimativas que você saiba de cor (nem calculadora). Você deve usar a definição de $\ln c$ como sendo, para $c > 1$, a área da região

$$1 \leq x \leq c, \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{x}.$$

(a) Mostre que $\frac{2}{3} < \ln 2 < \frac{3}{4}$.

(b) Seja $n > 1$ um inteiro positivo. Mostre que

$$\ln n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n.$$

(Dica: compare áreas de regiões.)

2. Sejam

$$a_k = \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)^{2^k}, \quad b_k = \left(1 + \frac{1}{2^k - 1}\right)^{2^k}.$$

(a) Mostre que $a_k < a_{k+1} < b_{k+1} < b_k$ para todo inteiro positivo k .

(b) Mostre que para todo $\epsilon > 0$ existe k tal que $b_k - a_k < \epsilon$.