PROFMAT — MA11 — PUC-Rio

18 de maio de 2013

O teste deve ser feito individualmente, sem consulta.
Todas as questões têm o mesmo valor.

1. O objetivo desta questão é demonstrar de forma elementar algumas estimativas. Não use estimativas que você saiba de cor (nem calculadora). Você deve usar a definição de $\ln c$ como sendo, para $c > 1$, a área da região

$$1 \leq x \leq c, \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{x}.$$

(a) Seja $n > 1$ um inteiro positivo. Mostre que

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} < \ln 2 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}.$$

(Dica: compare áreas de regiões.)

(b) Seja $n > 1$ um inteiro positivo. Seja

$$c_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n+2} + \cdots + \frac{2}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right).$$

Prove que $c_n > c_{2n} > \ln 2$.

(c) Seja $n > 2$ um inteiro positivo. Mostre que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

(Dica: use o binômio de Newton.)

(d) Seja $n > 2$ um inteiro positivo. Mostre que

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$