

PROFMAT — MA11 — PUC-Rio

16 de junho de 2012

O teste deve ser feito individualmente, sem consulta.

Todas as questões têm o mesmo valor.

1. (a) Encontre um polinômio $P_3(x)$ tal que

$$P_3(2 \cos(t)) = 2 \cos(3t)$$

para todo t .

- (b) Mostre que para todo inteiro positivo n existe um único polinômio $P_n(x)$ tal que

$$P_n(2 \cos(t)) = 2 \cos(nt)$$

para todo t .

- (c) Mostre que o polinômio $P_n(x)$ tem coeficientes inteiros.

2. (a) Seja

$$a_n = \sec\left(\frac{\pi}{2^{(n+1)}}\right).$$

Mostre que

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{2a_n}{1+a_n}}.$$

- (b) Considere o círculo unitário e polígonos regulares inscritos e circunscritos de 2^{n+1} lados. Sejam b_n e c_n os semiperímetros do polígono inscrito e circunscrito, respectivamente. Mostre que

$$b_1 = 2\sqrt{2}, \quad c_1 = 4, \\ b_{n+1} = a_{n+1}b_n, \quad c_{n+1} = a_{n+1}^2 b_n.$$

- (c) Mostre que

$$4\sqrt{2 - \sqrt{2}} < \pi < 8(\sqrt{2} - 1).$$