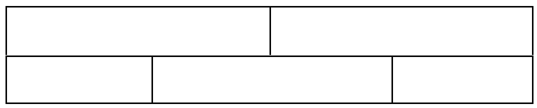
1) Dados 12 vértices e 16 arestas dispostos como no diagrama abaixo :



Prove que qualquer curva que não passa por qualquer dos vértices mas que cruza todas as arestas devera cruzar ao menos uma das aresta mais de uma vez.

2) É dado um retangulo ABCD com o comprimento da diagonal AC valendo L. Quatro círculos com centros em A, B, C e D e raios respectivamente iguais a "a", "b", "c" e "d", sao tais que : $L > a + c$, $a + c = b + d$. Prove que se pode inscrever um circulo no quadrilatero formado pelas intersecções entre duas tangentes comuns externas ao circulos A e C e duas tangentes comuns externas aos circulos B e D.

3) Prove que em qualquer sequencia de 39 numeros naturais consecutivos existe ao menos um numero cuja soma dos algarismos é divisível por 11.

4) Distribua 7 pedras nas 16 posicoes de uma matriz 4x4 de forma que se forem selecionadas duas linhas quaisquer e duas colunas quaisquer, havera ao menos uma pedra que nao foi selecionada. Mostre que uma tal distribuição e impossivel para menos de 7 pedras.

5-A) Seja dado uma quadrupla de numeros reais positivos (a,b,c,d). Aplicando a transformação : (a,b,c,d) -> (ab,bc,cd,da), teremos a nova quadrupla (ab,bc,cd,da). Prove que repetindo esta operação sucessivamente, jamais retornaremos a quadrupla original (a,b,c,d), a menos que $a=b=c=d=1$.
5-B) Prove que se N for uma potencia de 2, e cada termo da N-upla de numeros reais positivos (x1,x2,x3,...,xn) for igual a 1 ou a -1, a transformação (x1,x2,x3,...,xn) -> (x1*x2,x2*x3,x3*x4,...,xnx1) aplicada sucessivamente ira chegar a uma N-upla com todos os termos iguais a 1.

6-A) Dois corpos A e B movem-se em sentido horário e com a mesma velocidade angular em dois circulos centrados respectivamente em P e Q. Um corpo C move-se continuamente de forma que $AB=BC=CA$. Estabeleça o lugar geometrico descrito por C e a sua velocidade.
6-B) ABC é um triângulo equilátero e P e um ponto tal que $AP=2$ e $BP=3$. Estabeleça o máximo valor que pode assumir CP.

7) Dado uma matriz MxN de números reais. Pode-se modificar os sinais de todos os numeros de uma linha qualquer ou os sinais de todos os numeros de uma coluna qualquer. Prove que com estas duas operações sempre poderemos chegar a uma matriz MxN em que a soma dos elementos de qualquer linha e a soma dos elementos de qualquer coluna são sempre positivas.

8) Sejam dados N pontos (N > 1), dos quais alguns pares estao ligados por um fio (um fio nunca liga um ponto a si proprio). Se, para quaisquer dois pontos distintos pode-se alcançar um deles partindo-se do outro, através de UM UNICO caminho, (atraves de um fio) mostre que o numero de fios é N -1.

9) Dados quaisquer numeros naturais "m", "n" e "k". Prove que nós sempre podemos encontrar dois numeros "r" e "s", primos entre si, tal que " r*m + s*n " é um multiplo de "k".

10) Jose e Maria jogam um jogo com N fichas. Jose divide as N fichas em duas pilhas, cada pilha com ao menos duas fichas. Então Maria divide cada uma das duas pilhas em duas outras pilhas, cada pilha com ao menos uma ficha. Surgem então quatro pilhas : Maria toma então duas destas quatro pilhas, obedecendo uma regra estipulada previamente. Jose ficará com as duas pilhas restantes.Tanto Jose quanto Maria fazem suas escolhas de forma a ficarem com o maior numero de fichas possivel.

A regra estipulada previamente, obedecida por Maria, pode ser :

R1 - Maria tomara sempre as pilhas com maior e com menor numero de fichas
R2 - Maria tomara sempre as pilhas com numero intermediário de fichas
R3 - Maria podera escolher entre as regras 1 e 2

Para cada regra, com quantas fichas Jose ficará se ambos os jogadores jogam de forma ótima ?

11) Sejam dadas tres sequências infinitas de numeros naturais. Prove que nós podemos encontrar dois numeros naturais "m" e "n", diferentes, tais que, para cada sequencia, o m-esino termo nao e menor que o n-ésimo termo.

12) 120 quadrados de lado unitario são distribuídos arbitrariamente no interior de um retângulo 20x25 (tanto a posição quanto a orientação dos quadrados e arbitrária). Prove que é sempre possível posicionar um círculo de diâmetro unitario no interior do retângulo de forma que ele não tenha intersecção com qualquer dos quadrados.

13) ABCD é um quadrilátero convexo qualquer. Construa um novo quadrilátero como segue : tome E de forma que A seja o ponto médio de DE; tome F, de forma que B seja o ponto médio de AF; tome G, de forma que C seja o ponto médio de BG e tome H se forma que D seja o ponto médio de CH. Prove que a area de EFGH e cinco vezes a área de ABCD.

14) Sejam dados uma círcunferência fixa C e uma linha L que passa pelo centro O de C. Tomando um ponto arbitrário P em L, seja K a circunferência com centro em P e que passa por O. Traçando uma tangente comum a K e C, seja T o ponto onde esta tangente tangencia K. Conforme P varia ao longo de L, qual o lugar descrito por T ?

15) Sejam dados os inteiros A1, A2, ..., A100 satisfazendo : A1 > A0 e A1 > 0 e An+2=3*An+1 - 2*An para todo "n' igual a 1,2,3,...,98. Prove qua a100 > 2^99.

16) Prove que não existem inteiros "a,b,c, d" tais que o polinômio a*(x^3) + b*(x^2) + c*x + d seja igual a 1 em x=19 e igual a 2 em x=62.

17) Seja dada uma matriz quadrada de ordem N (NxN), onde N é um número impar e cada elemento da matriz é 1 ou -1. Prove que se somarmos o número de linhas que contem um número impar de números -1 com o número de colunas que contem um numero impar de -1 jamais obteremos N.

18) Dando-se os comprimentos dos lados AB e BC e o fato de que as medianas relativas as estes lados são perpendiculares, construa o triangulo ABC.

19) Sejam dados quatro números reais e positivos "a", "b", "c" e "d". Prove que : a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd >= 10.

20) Seja dado um pentágono regular fixo ABCDE com lado igual a 1 e seja M um ponto arbitrário sobre o pentágono ou no seu interior. A distância de M ao vértice mais próximo é r1, ao segundo vértice mais próximo é r2 e assim sucessivamente até o vértice mais distante de M, cuja distância será r5. Encontre (20-A) O lugar de M para o qual r3 é maximo e (20-B) O lugar de M para o qual r3 é mínimo.