81) Para quaisquer 100 pontos em um plano, prove que é possivel cobri-los com uma coleção de círculos cuja soma dos diâmetros é menor que 100 e a distância entre dois quaisquer deles é maior que 1. (Se a distância entre os centros de dois círculos de raios R e S é D, a distância entre os círculos é o maior número entre 0 e D - (R + S))

82) A distância entre as cidades A e B é D kilômetros. Um avião esta voando de A para B com altura e velocidade constantes. Durante um período de 1 segundo, o ângulo PAB modifica-se de α graus e o ângulo PBA de β graus. Qual a mínima velocidade que o avião pode ter ?

83) Dois jogadores escolhem, alternadamente, o sinal de um dos números 1, 2, 3, ... 20. Desde que o sinal de um número foi escolhido, ele não poderá ser modificado. Após todos os números terem recebido sinal, é efetuado a soma algébrica dos números e, a seguir, tomado o valor absoluto desta soma. O primeiro jogador procura minimizar o valor absoluto da soma, enquanto que o segundo jogador procura maximiza-lo. Como pode ser o resultado final, supondo-se que cada jogador joga com perfeição ?

84) Num triângulo acutângulo ABC, AH é a maior das alturas (H está em BC), M é o ponto médio de AC e CD é a bissetriz de ACD (D em AB). Se AH =< BM, prove que o angulo ABC =< 60. Se AH=BM=CD, prove que o triangulo ABC é equilátero.

85) Os dígitos de um número natural são reordenados e o número resultante é acrescido ao número original. Prove que a resposta não pode ser um número formado apenas com o algarismo nove. Prove também que se a resposta for 10^10, então o número original é divisível por 10.

86)

87) È possível dispor os números 0,1,2,3...,9 ao longo de uma circunferência de círculo de forma que a diferença entre quaisquer par de números adjacentes seja sempre 3, 4 ou 5 ? E o que falar sobre os números 0, 1, 2, ..., 13 ?

88) Prove que existe um número divisível por 5^1000 que não tem dígito zero.

89) Encontre todos os inteiros X e Y satisfazendo X + X^2 = Y + Y^2 + Y^3 + Y^4

90) Qual é a máxima extensão possível da sequencia de números naturais X1, X2, X3, ... tal que Xi =< 1998 para i >= 1 e Xi=modulo(Xi-1 - Xi-2) para i >= 3 ?

91) 499 torres brancas e um rei preto estão posicionados em um tabuleiro 1000 X 1000. A torre e o rei movem-se como no xadrez ordinário, exceto que a captura não é permitida, mas o rei pode ficar em xeque. Independente de qual seja a posição inicial, o rei preto sempre poderá :
(A) ser apanhado em xeque (após um número finito de movimentos)

(B) ser apanhado em xeque imediatamente após mover-se de sua posição inicial
(C) ser apanhado em xeque imediatamente após mover-se de sua posição inicial (após um movimento das torres brancas)

92)

93) Um número natural K tem a propriedade de que se K divide N, então o número obtido N pela reversão de seus dígitos é também divisível por K. Prove que K é um divisor de 99 (Reversão dos dígitos de N significa que o primeiro dígiton passa a ser o último, o segundo passa a ser o penúltimo e assim sucessivamente)

94) Um octógono tem ângulos iguais. Os seus lados são números inteiros. Prove que os lados opostos são dois a dois iguais.

95) Qual é o maior : 31^{11} ou 17^{14} ?

96)Um círculo de raio 100 é desenhado sobre um papel quadriculado com quadrados unitários. Ele não tangencia qualquer dos quadrados e não passa por qualquer dos seus vértices. Qual é o número máximo de quadrados através dos quais ele pode passar ?

97) Num grupo de estudantes, 50 falam inglês, 50 falam francês e 50 falam espanhol. Alguns estudantes falam mais de uma lingua. Prove que é possível dividir os estudantes em cinco grupos (não necessáriamente com a mesma quantidade de estudantes) tal que em cada grupo 10 falam ingles, 10 falam francês e 10 falam espanhol.

98)Prove que :

$$2/(X^2 - 1) + 4/(X^2 - 4) + 6/(X^2 - 6) + ... + 20/(X^2 - 100) =$$
$$11/((X-1)(X+10)) + 11/((X-2)(X+9)) + 11/((X-3)(X+8)) + ... + 11/((X-10)(X+1))$$

99)A diferença entre a maior e a menor das diagonais de um polígono regular de N lados é igual ao seus lado. Encontre todos os valores possíveis para N

100) A sequencia A_n é definida como $A_1=1$ e $A_{n+1}= A_n + 1/A_n$, $N >= 1$.Prove que $A_{100} > 14$