Formas diferenciais e o grupo fundamental

Nicolau C. Saldanha

Seja A um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$; neste artigo mostramos como relacionar o espaço das 1-formas fechadas com o grupo fundamental de A. Mais precisamente, seja $Z^1(A)$ o espaço das 1-formas fechadas (i.e., com derivada nula) e $B^1(A) \subseteq Z^1(A)$ o sub-espaço das 1-formas exatas (i.e., que são derivadas de alguma 0-forma). Lembramos que 0-formas sobre A são funções de A em $\mathbb{R}$ e 1-formas podem ser identificadas com campos de vetores via o produto interno usual. Com esta identificação, B^1 é o espaço dos gradientes de funções e Z^1 é o espaço dos campos de vetores que são localmente gradientes de alguma função. Definimos $H^1_{\text{de Rham}}(A) = Z^1(A)/B^1(A)$; este espaço é conhecido como o primeiro espaço de cohomologia de de Rham de A (veja [BT] para uma discussão detalhada da cohomologia de de Rham), Demonstraremos que $H^1_{\text{de Rham}}(A) = \operatorname{Hom}(\pi_1(A), \mathbb{R})$.

Esta relação é bem conhecida, mas em geral é apresentada como conseqüência de outros teoremas muito mais gerais e poderosos, como o teorema de de Rham, o teorema de Hurewicz, o teorema dos coeficientes universais ou a definição de $H^1(A)$ em termos de funções de A em $\mathbb{S}^1$. Nossa demonstração supõe apenas a definição de de Rham para $H^1(A)$ os fatos básicos sobre grupo fundamental e espaços de recobrimento (como em [Li2] ou [M]) e a existência de partições suaves da unidade (como em [La] ou [Li1]). O leitor que conhecer a definição de variedade perceberá que pode facilmente substituir A por uma variedade qualquer.

O aberto A admite um recobrimento universal $\tilde{A}$. Seja $p : \tilde{A} \to A$ a aplicação de recobrimento, e sejam $y_0 \in \tilde{A}$ e $x_0 = p(y_0) \in A$ pontos base para $\tilde{A}$ e A. O grupo fundamental $\pi_1(A, x_0)$ admite pelo menos as três seguintes interpretações:

(a) o conjunto dos caminhos fechados em A com extremos iguais a x_0, identificando caminhos homotópicos;

(b) o conjunto das imagens inversas de x_0 por p (identificamos aqui y_0 com e);

(c) o conjunto das *transformações de recobrimento* de $\tilde{A}$, isto é, o conjunto das funções contínuas G de $\tilde{A}$ em $\tilde{A}$ satisfazendo $p \circ G = p$.

Vamos supor que o leitor esteja familiarizado com estas interpretações de π_1. Um aberto $U \subseteq A$ é dito *distinguido* se a restrição de p a uma componente conexa $\tilde{U}$ de $p^{-1}(U)$ é um homeomorfismo entre $\tilde{U}$ e U. Pela definição de espaço de recobrimento, A é coberto por abertos distinguidos. Podemos tomar uma cobertura localmente finita de A por abertos distinguidos: $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ (isto é, para cada ponto $x \in A$ existe uma vizinhança de x que tem intersecção não vazia com apenas um número finito de U_λ's; a existência de uma cobertura localmente finita segue da paracompacidade de A (veja [K] para a definição de paracompacidade)). Tomemos agora uma partição suave da unidade subordinada a esta cobertura, ou seja, uma família de funções C^∞, $h_\lambda : A \to [0, 1]$, $\lambda \in \Lambda$, satisfazendo $\sum_{\lambda \in \Lambda} h_\lambda = 1$ com o suporte de h_λ contido em U_λ (veja [La] ou [Li1] para a demonstração de que existe esta partição da unidade). Isto conclui a lista dos pré-requisistos.

Vamos à construção da aplicação natural de H^1 para $\mathrm{Hom}(\pi_1(A, x_0), \mathbb{R})$. Suponha dada uma 1-forma fechada $\omega \in Z^1(A)$ e um elemento g de $\pi_1(A, x_0)$. Seja $\gamma : [0,1] \to A$ um representante suave de g; associamos a ω e a g o valor da integral

$$\int_{[0,1]} \gamma^* \omega;$$

pelo teorema de Stokes é fácil verificar que este número independe da escolha de γ. A verificação de que esta aplicação define um homomorfismo de H^1 para $\mathrm{Hom}(\pi_1, \mathbb{R})$ é trivial (detalhes a cargo do leitor); devemos verificar que ela é injetora e sobrejetora.

Seja ω uma forma que induz o homomorfismo nulo de π_1 para $\mathbb{R}$: isto significa que a integral da forma sobre qualquer caminho fechado é sempre zero. Ou seja, podemos integrar a forma ω obtendo uma função v com $dv = \omega$, ou seja, ω é exata. Assim, nossa aplicação é injetora.

Seja ϕ um homomorfismo de π_1 em $\mathbb{R}$. Vamos construir uma forma ω que seja levada em ϕ. As componentes conexas das imagens inversas dos abertos U_λ formam uma cobertura localmente finita de $\tilde{A}$; chamemos esta cobertura de $\tilde{U}_{\lambda,g}$, $\lambda \in \Lambda$, $g \in \pi_1(A, x_0)$. O segundo índice funciona da seguinte forma: escolhemos arbitrariamente uma componente conexa de $p^{-1}(U_\lambda)$ e chamamos este aberto de $\tilde{U}_{\lambda,e}$; dado $g \in \pi_1(A)$, seja G a transformação de recobrimento correspondente a g: definimos $\tilde{U}_{\lambda,g}$ como $G(\tilde{U}_{\lambda,e})$. Seja $\tilde{h}_{\lambda,g}$ a função com suporte contido em $\tilde{U}_{\lambda,g}$ satisfazendo

$$\tilde{h}_{\lambda,g}|_{\tilde{U}_{\lambda,g}} = (h_\lambda \circ p)|_{\tilde{U}_{\lambda,g}};$$

ou seja, decompomos a função $h_\lambda \circ p$ como uma soma de funções com suportes contidos nas componentes conexas de $p^{-1}(U_\lambda)$. Definimos agora uma função suave u de $\tilde{A}$ em $\mathbb{R}$ por

$$u = \sum_{\lambda \in \Lambda, g \in \pi_1} \phi(g) \tilde{h}_{\lambda,g};$$

como nossa cobertura é localmente finita, localmente a "série" reduz-se a uma soma finita, garantindo tanto a convergência quanto a suavidade. Afirmamos que a 1-forma ω desejada é definida por $p^*\omega = du$.

Seja $G_i : \tilde{A} \to \tilde{A}$ a transformação de recobrimento correspondente a $g_i \in \pi_1(A)$. Observe que $G_1(\tilde{U}_{\lambda,g_2}) = (G_1 \circ G_2)(\tilde{U}_{\lambda,e}) = \tilde{U}_{\lambda,g_1 g_2}$ e $h_{\lambda,g_1 g_2} \circ G_1 = h_{\lambda,g_2}$. Assim,

$$\begin{aligned} u \circ G_1 &= \sum_{\lambda \in \Lambda, g \in \pi_1} \phi(g) \tilde{h}_{\lambda,g_1^{-1}g} = \sum_{\lambda \in \Lambda, g \in \pi_1} \phi(g_1 g) \tilde{h}_{\lambda,g} = \sum_{\lambda \in \Lambda, g \in \pi_1} (\phi(g_1) + \phi(g)) \tilde{h}_{\lambda,g} \\ &= \phi(g_1) + \sum_{\lambda \in \Lambda, g \in \pi_1} \phi(g) \tilde{h}_{\lambda,g} = \phi(g_1) + u. \end{aligned}$$

Portanto, $G^* du = du$ para qualquer transformação de recobrimento G, ou seja, existe uma 1-forma fechada ω em A com $p^*\omega = du$. Finalmente, se γ é um caminho representando g,

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} \gamma^* \omega &= \int_{[0,1]} \tilde{\gamma}^* du \\ &= u(\tilde{\gamma}(1)) - u(\tilde{\gamma}(0)) = u(G(y_0)) - u(y_0) = \phi(g), \end{aligned}$$

onde $\tilde{\gamma}$ é o levantamento de γ e G é a transformação de recobrimento correspondente a g, o que mostra que ω de fato está associada a ϕ, e conclui a demonstração.

Gostaria de agradecer a Elon Lages Lima por me incentivar a escrever este artigo.

Referências:

[BT] R. Bott and L. W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, GTM 82, Springer-Verlag, New York, USA (1982).

[K] J. L. Kelley, *General Topology*, GTM 27, Springer-Verlag, New York, USA (Second printing, 1985).

[La] S. Lang, *Real and Functional Analysis, Third Edition*, GTM 142, Springer-Verlag, New York, USA (1993).

[Li1] E. L. Lima, *Curso de Análise, vol. 2*, Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq (1985).

[Li2] E. L. Lima, *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*, Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq (1993).

[M] W. S. Massey, *Algebraic Topology: An Introduction*, GTM 56, Springer-Verlag, New York, USA (Corrected Eighth printing, 1989).

Nicolau C. Saldanha
Departamento de Matemática, PUC-Rio
Rua Marquês de São Vicente 225
Gávea, Rio de Janeiro, RJ 22453-900, BRASIL
nicolau@mat.puc-rio.br, http://www.mat.puc-rio.br/~nicolau/