

## A Desigualdade Isoperimétrica

Carlos Gustavo T. de A. Moreira

Nicolau Corção Saldanha

A desigualdade isoperimétrica afirma que qualquer curva fechada de comprimento  $\ell$  cerca uma área menor ou igual a  $\frac{\ell^2}{4\pi}$  e que este valor só é atingido se a curva for um círculo de raio  $\frac{\ell}{2\pi}$ . Existem muitas demonstrações conhecidas deste fato. Vamos aqui apresentar uma demonstração simples e totalmente elementar deste teorema. Vamos primeiro demonstrar um resultado análogo para polígonos: dentre os polígonos de  $n$  lados com perímetro fixo o de maior área é o regular. Depois veremos como a partir destes resultados demonstrar a desigualdade isoperimétrica usual.

Vamos começar vendo dois resultados de geometria clássica.

**Afirmção 0:** *Dentre todos os triângulos  $ABC$  de base  $AB$  fixa e perímetro dado, aquele de maior área é o isósceles. Além disso, dados dois triângulos  $ABC$  e  $ABC'$  com mesmo perímetro e  $|\overline{AC} - \overline{BC}| < |\overline{AC'} - \overline{BC'}|$ , a área de  $ABC$  é maior que a área de  $ABC'$ .*

Esta afirmação é consequência fácil da fórmula de Heron: a área de um triângulo de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  é dada por

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

onde  $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ .

**Afirmção 1:** *Dentre todos os quadriláteros com lados dados, aquele de maior área é o inscritível. Mais ainda, se consideramos dois quadriláteros  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$  com lados correspondentes iguais, se  $|\hat{A} + \hat{C} - \pi| < |\hat{A}' + \hat{C}' - \pi|$  então a área de  $ABCD$  é maior que a área de  $A'B'C'D'$ .*

Estas afirmações seguem da fórmula abaixo: a área  $S$  de um quadrilátero de lados  $a = \overline{AB}$ ,  $b = \overline{BC}$ ,  $c = \overline{CD}$  e  $d = \overline{DA}$  e ângulos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$  é dada por

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - \frac{1}{2}abcd(1 + \cos(\hat{A} + \hat{C}))},$$

onde  $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ . Esta fórmula pode ser obtida elevando ao quadrado o valor de  $S$  dado por  $S = \frac{1}{2}ad \sin \hat{A} + \frac{1}{2}bc \sin \hat{C}$  (este valor é obtido somando as áreas de  $DAB$  e  $BCD$ ) usando a identidade  $a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos C$  (os dois lados dão o quadrado da diagonal  $BD$  pela lei dos cossenos).

**Afirmção 2:** *Dado um polígono não convexo, temos outro polígono com número de lados menor, perímetro menor e área maior.*

Para isto, queremos obter dois vértices não consecutivos tais que a reta determinada por eles tem o polígono inteiramente contido em um dos semi-planos por ela determinados. Obteremos o novo polígono substituindo a parte interior da poligonal ligando estes dois pontos pelo segmento que os liga (Fig. 1).

Para obter estes vértices, considere no plano cartesiano o vértice de maior coordenada  $x$ , chamemo-lo de  $P_0$ . A reta vertical que passa por este ponto tem todo o polígono de um lado. Vamos girar esta reta no sentido anti-horário ao redor deste vértice até encontrarmos o primeiro outro vértice; esta reta ainda tem todo o polígono de um lado. Se a intersecção desta reta com o polígono não for um dos lados, o vértice inicial e o outro que estiver em cima da reta (ou, caso exista mais de um, o mais distante do vértice inicial) serão os dois vértices que buscamos. Caso contrário precisamos continuar nossa busca; obtivemos um lado  $P_0P_1$  de convexidade do polígono, i.e., um lado tal que o polígono está inteiramente contido em um dos semi-planos determinados por sua reta suporte. Prosseguimos girando esta reta suporte no sentido anti-horário ao redor de  $P_1$  até encontrarmos um novo vértice. Novamente temos os dois casos acima e se tivermos um novo lado de convexidade continuamos o processo. Este processo ou deve parar (com o sucesso) ou deve resultar em que voltemos até  $P_0$ , mas neste caso todos os lados seriam de convexidade e o polígono seria convexo, contradizendo a hipótese.

Se repetirmos o processo descrito na afirmação 2 um número suficiente de vezes chegaremos em um polígono convexo chamado o *fecho convexo*. Nossa construção garante que o conjunto dos vértices do fecho convexo é um subconjunto do conjunto de vértices do polígono original. Mais ainda, o fecho convexo tem número de lados menor, perímetro menor e área maior que o polígono inicial.

**Afirmação 3:** *Dado qualquer polígono não regular, existe um polígono regular com número de lados menor ou igual, perímetro menor ou igual, e área maior.*

Demonstramos isto por indução sobre o número de lados. Vamos descrever um processo para a partir de um polígono qualquer obter primeiramente um equilátero e depois um regular com o mesmo número de lados que o inicial, sempre aumentando a área a cada passo. Adotaremos este processo enquanto o polígono for convexo e se em algum momento o polígono for não convexo a afirmação 2 nos fornece um polígono com número de lados menor, área maior e perímetro menor, o que conclui a demonstração por hipótese de indução.

Vamos tornar o polígono equilátero fazendo com que cada um de seus lados seja igual à média  $\ell$  de todos os lados do polígono. Suponha que tenhamos dois lados vizinhos  $AB$  e  $BC$ , um maior e outro menor que  $\ell$ . Podemos, pela afirmação 0, encontrar um ponto  $B'$  para substituir  $B$ , mantendo o perímetro fixo e aumentando a área, tornando  $\overline{AB'}$  igual a  $\ell$ . Caso não existam dois tais lados vizinhos mas o polígono não seja equilátero, permutaremos os lados de tal forma a chegar nesta situação. De fato, dados dois lados vizinhos  $AB$  e  $BC$  podemos substituir  $B$  por  $B'$  de tal forma que  $\overline{AB'} = \overline{BC}$ ,  $\overline{B'C} = \overline{AB}$ ; escolhendo  $B'$  do mesmo lado que  $B$  em relação à reta  $AC$ , a área e o perímetro ficam inalterados. Após uma seqüência finita apropriada de tais permutações, chegaremos na situação descrita acima. Assim aumentaremos o número de lados iguais a  $\ell$  até que o polígono se torne equilátero, sempre aumentando a área.

Vamos agora descrever um processo análogo para tornar o polígono equiângulo e portanto regular, sempre aumentando a área. Vamos chamar os vértices cujos ângulos internos são iguais ao ângulo interno para o polígono regular de *bons* e os demais de

*maus*. Observe que não podemos ter menos de quatro ângulos maus a não ser que o polígono seja regular. De fato, suponha um polígono  $A_1A_2\dots A_n$  com únicos vértices possivelmente maus  $A_i$ ,  $A_j$  e  $A_k$ . Seja  $B_1B_2\dots B_n$  um polígono regular de mesmo lado  $\ell$ . Os polígonos  $A_iA_{i+1}\dots A_j$  e  $B_iB_{i+1}\dots B_j$  são congruentes, também  $A_jA_{j+1}\dots A_k$  é congruente a  $B_jB_{j+1}\dots B_k$  e  $A_kA_{k+1}\dots A_i$  é congruente a  $B_kB_{k+1}\dots B_i$ ; além disso, os triângulos  $A_iA_jA_k$  e  $B_iB_jB_k$  são congruentes. Tudo isto implica que  $A_1A_2\dots A_n$  é regular (Fig. 2).

Em um polígono equilátero mas não regular considere o conjunto dos vértices maus. Podemos tomar neste conjunto dois vértices maus  $A$  e  $B$ ,  $A$  com ângulo muito grande e  $B$  com ângulo muito pequeno, consecutivos no conjunto dos vértices maus. Considere agora o quadrilátero  $ABCD$ , onde  $C$  é consecutivo a  $B$  no conjunto dos vértices maus assim como  $A$  é consecutivo a  $D$  no mesmo conjunto (Fig. 3). Queremos deformar este quadrilátero no sentido de diminuir os ângulos  $A$  e  $C$  e aumentar os ângulos  $B$  e  $D$  até  $A$  ou  $B$  tornar-se bom. Ao deformar o quadrilátero deformaremos simultaneamente o polígono mantendo rígidos os arcos entre dois vértices consecutivos do quadrilátero. Resta verificar que este processo aumenta a área do quadrilátero e portanto do polígono: para isso, usando a afirmação 1, basta verificar que enquanto  $A$  for grande e  $B$  for pequeno  $A + C$  será maior que  $\pi$ .

Na figura 4, o círculo indicado tem raio igual ao do círculo circunscrito ao polígono regular de lado  $\ell$ . Sejam  $C'$  e  $D'$  conforme indicado na figura as intersecções de  $CD$  com o círculo. Temos  $B\hat{A}D > B\hat{A}D'$  e  $B\hat{C}D > B\hat{C}'D$  donde  $B\hat{A}D + B\hat{C}D > B\hat{A}D' + B\hat{C}'D = \pi$ . Isto mostra que sempre podemos aumentar o número de vértices bons até chegarmos ao polígono regular. Isto conclui a demonstração da afirmação 3.

Aliás, observe que o raciocínio usado na parte final da demonstração desta última afirmação mostra que dentre todos os polígonos com lados dados o de maior área é o inscritível; além disso, a ordem dos lados não afeta a área máxima. De fato, basta chamar de ‘bom’ a um ângulo igual a seu correspondente no polígono inscritível. Devemos continuar o processo mesmo que isso envolva polígonos não convexos ou até entrecruzados. Para isso, é necessário definir a área de um polígono entrecruzado de forma adequada: a área que for cercada várias vezes deve ser contada com a multiplicidade do número de voltas que a poligonal dá a seu redor onde voltas no sentido anti-horário contam positivamente e voltas no sentido horário contam negativamente. Esta definição coincide com a usual para polígonos simples percorridos no sentido anti-horário. Não consideramos este ponto de vista aqui exatamente para evitar estas dificuldades técnicas.

**Afirmação 4:** *Se  $n < m$  a área de um polígono regular de  $n$  lados é menor que a área de um polígono regular de  $m$  lados de mesmo perímetro. Além disso, a área do círculo é maior que a área de qualquer polígono regular de mesmo perímetro.*

Vamos provar a primeira parte da afirmação por indução sobre  $m$ . Para isto basta provar, dado que a afirmação é correta para  $n < m \leq m_0$ , que a área de um polígono regular de  $m_0 + 1$  lados é maior que a área de um polígono regular de  $m_0$  lados com o mesmo perímetro. Considere um polígono regular de  $m_0$  lados e pense nele como um polígono de  $m_0 + 1$  lados, sendo um dos lados igual a zero. A afirmação 3 nos fornece,

se necessário após uma expansão, um polígono regular de perímetro igual, área maior e número de lados menor ou igual a  $m_0 + 1$ . Observe que na primeira etapa da construção o lado de tamanho zero será tornado positivo. Este número de lados só pode ser igual a  $m_0 + 1$  pois senão estaríamos contradizendo a hipótese de indução.

Para a segunda parte, devemos apenas observar que as áreas dos polígonos de  $n$  lados e perímetro dado tendem para a área do círculo de mesmo perímetro quando  $n$  cresce. Isto segue do fato de que o polígono regular de perímetro  $\ell$  tem lado maior que o do polígono de mesmo tipo inscrito no círculo de circunferência  $\ell$  e menor do que o do polígono circunscrito a este círculo.

**Teorema: (Desigualdade Isoperimétrica)** *Toda curva fechada de comprimento  $\ell$  engloba uma área menor ou igual a  $\ell^2/4\pi$ . Além disso, este valor só é alcançado para o círculo de raio  $\ell/2\pi$ .*

Suponha que temos uma curva de comprimento  $\ell$  englobando uma área  $A$ . Vamos escolher um número inteiro positivo  $N$  e tomar  $N$  pontos ao longo da curva, igualmente espaçados em termos do comprimento do arco de curva entre eles. Vamos ligar estes pontos por linhas retas para obter um polígono de  $N$  lados e perímetro menor que  $\ell$ . Tomemos o fecho convexo deste polígono: seu perímetro é menor que  $\ell$  donde, pelas afirmações anteriores, sua área  $B$  é menor que  $\ell^2/4\pi$ . Consideremos o conjunto dos pontos que ou estão dentro deste fecho convexo ou, estando fora dele, distam menos de  $\ell/2N$  de algum dos  $N$  pontos originais: a curva original está totalmente contida nesta região pois qualquer ponto da curva dista menos de  $\ell/2N$  de algum destes  $N$  pontos. Por outro lado, a área desta região será menor ou igual a  $B + N\pi(\ell/2N)^2$  pois está contida na união do fecho convexo com  $N$  círculos de raio  $\ell/2N$  e centros nos  $N$  pontos. Assim,  $A \leq B + N\pi(\ell/2N)^2 \leq \ell^2/4\pi + \pi\ell^2/4N$ , e, como esta estimativa vale para qualquer  $N$ ,  $A \leq \ell^2/4\pi$ .

Finalmente, consideremos uma curva de comprimento  $\ell$  englobando área  $\ell^2/4\pi$  e vamos provar que ela é um círculo. Primeiro, observemos que ela é convexa. De fato, para uma curva não convexa sempre existe um segmento de reta ligando dois pontos da curva e contido inteiramente no exterior da mesma. Este segmento divide a parte do plano fora da curva em duas regiões, uma limitada e a outra não. Tomando a porção da curva que toca a região ilimitada mais o segmento de reta temos uma nova curva fechada de perímetro menor e área maior, contradizendo o primeiro parágrafo (Fig. 5). Agora, para uma curva convexa distinta do círculo tome quatro pontos não cocirculares. Se deformarmos o quadrilátero com estes quatro vértices mantendo rígidos os arcos de curva entre dois pontos até o quadrilátero tornar-se inscrito estaremos aumentando a área sem mudar o perímetro (Fig. 6).

IMPA, Estr. D. Castorina 110  
Jardim Botânico, Rio de Janeiro  
RJ 22460-320, Brasil

gugu@impa.br

nicolau@impa.br, <http://www.impa.br/~nicolau/>