

# O leão e o homem: perseguição e fuga com posição e velocidade limitadas

*Miriam Abdón, Carlos Gustavo T. de A. Moreira,  
Nicolau Corção Saldanha*

Depois que Von Neumann e Morgenstern criaram a teoria dos jogos e a utilizaram para estudar certos jogos discretos, vieram tentativas de aplicar esta teoria a situações contínuas. Havia um interesse especialmente grande por problemas com aplicações militares, como a perseguição de um avião ou navio por um míssil. Qual estratégia deveria ser seguida pelo perseguidor? Seria possível ao fugitivo evitar o choque? Por quanto tempo? Destas perguntas surgiu a teoria dos *jogos diferenciais* que já conta com uma imensa literatura; alguns textos gerais sobre o assunto são [Fr], [I] e [KS].

Consideraremos neste artigo um problema particularmente simples de perseguição e fuga: o problema do leão e do homem. Este problema é bem conhecido (veja [L] ou [Fl] para a versão contínua) e foi usado na prova por equipes da 9<sup>a</sup> Olimpíada Iberoamericana de Matemática. Dois jogadores  $A$  (o leão) e  $B$  (o homem) movem-se em uma arena limitada e a única restrição sobre suas trajetórias é que as velocidades são limitadas;  $A$  persegue e tenta alcançar  $B$  (o leão quer comer) e  $B$  tenta fugir de  $A$  (o homem não quer ser comido). Consideramos duas versões do problema: na primeira discretizamos o tempo de forma que os jogadores saltam alternadamente; na segunda, o tempo é contínuo. Nosso objetivo é em cada caso saber se existe uma estratégia para  $A$  (ou  $B$ ) que garanta sua vitória.

Este problema é mais simples que a maioria daqueles tratados na literatura de jogos diferenciais pois não impomos restrições à aceleração ou curvatura das trajetórias; também não tentamos estimar o tempo até o choque. Apesar de simples, este problema *não* é discutido em muitos livros de jogos diferenciais por não se adequar bem a parte da teoria geral. Todos os nossos argumentos são elementares e o leitor só precisa saber geometria plana e os rudimentos do cálculo para seguir as demonstrações.

## I. Caso discreto

O leão  $A$  persegue sua vítima humana  $B$  em uma arena convexa limitada  $S$ . As posições iniciais de  $A$  e  $B$  são  $p_A$  e  $p_B$ ;  $A$  e  $B$  pulam alternadamente distâncias de no máximo  $\ell_A$  e  $\ell_B$ . O leão  $A$  consegue golpear e assim derrubar e vencer  $B$  se e somente se conseguir chegar a uma distância menor ou igual a  $d$  de  $B$  (no caso  $d = 0$ , entendemos que  $A$  vence apenas se conseguir saltar exatamente sobre  $B$ ).

a. Caso  $\ell_A = \ell_B$ ,  $d > 0$

Neste caso,  $A$  tem uma estratégia para alcançar  $B$ . De fato, uma tal estratégia consiste em dar passos de tamanho  $\min\{\ell_A, d(p_A, p_B)\}$  na direção de  $B$ . Suponha sem perda de generalidade que  $\ell_A = 1$ . Com esta estratégia, a distância entre  $A$  e  $B$  nunca aumenta e, se a distância logo antes do salto de  $A$  é menor ou igual a  $1 + d$  então  $A$  ganha o jogo imediatamente. Na verdade, a distância só se mantém inalterada enquanto  $B$  anda com passos de tamanho  $\ell_B$  ao longo da linha reta  $p_A p_B$ . Como a arena é limitada,  $B$  deverá em algum momento freiar ou desviar-se desta direção, o que implica em uma redução da distância. Queremos verificar que a distância em algum momento será menor que  $d$ .

Para isso, note primeiramente que, se o passo de  $B$  desvia de um ângulo  $\theta$  da direção  $p_A p_B$ ,  $|p_A - p_B| = h > d$ , no próximo lance de  $A$  a distância diminuirá de pelo menos  $h + 1 - \sqrt{1 + h^2 + 2h \cos \theta}$ , como pode-se ver pela Figura A. Por outro lado,

$$h + 1 - \sqrt{1 + h^2 + 2h \cos \theta} \geq d + 1 - \sqrt{1 + d^2 + 2d \cos \theta}$$

pois esta expressão é monótona em  $h$ , como pode ser verificado estudando o sinal de sua derivada.

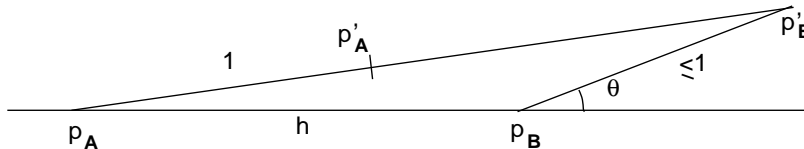


Figura A

Seja  $D$  o diâmetro da arena;  $B$  pode dar no máximo  $\lfloor 4D \rfloor$  passos de comprimento maior ou igual a  $1/2$  com desvio menor ou igual a  $\pi/\lfloor 12D \rfloor$ : caso contrário,  $B$  sairia da arena. De fato, se  $B$  desse mais de  $\lfloor 4D \rfloor$  passos com desvios tão pequenos, o ângulo entre qualquer passo e a reta ligando as posições iniciais de  $A$  e  $B$  seria sempre menor ou igual a  $\pi/3$  e, considerando as projeções dos passos nesta reta, vemos que a distância entre as posições inicial e final de  $B$  seria maior que o diâmetro da arena.

Assim, a cada  $\lfloor 4D + 1 \rfloor$  passos, ou existe um passo de  $B$  de comprimento menor que  $1/2$ , caso em que a distância diminui de pelo menos  $1/2$ , ou existe um passo com desvio maior que  $\pi/\lfloor 12D \rfloor$ , caso em que a distância diminui de pelo menos  $d + 1 - \sqrt{1 + d^2 - 2d \cos(\pi/\lfloor 12D \rfloor)}$ . Portanto,  $A$  terminará por vencer.

b. Caso  $\ell_A = \ell_B$ ,  $d = 0$

Se  $A$  seguir a estratégia do item anterior, provavelmente nunca alcançará  $B$ . Por exemplo, consideremos a situação onde a arena contém um disco suficientemente grande e  $B$  adota a estratégia de mover-se no bordo deste disco afastando-se o máximo possível de  $A$ . Excluindo-se algumas posições iniciais onde  $A$  pega  $B$  quase imediatamente,  $A$  nunca pega  $B$ : tente construir uma seqüência de posições de  $A$  e  $B$  de trás para frente e ficará claro porquê.

Entretanto,  $A$  ainda tem uma estratégia vencedora. Suponha novamente  $\ell_A = 1$  e seja  $D$  o diâmetro da arena. O jogador  $A$  pode seguir a estratégia do item anterior até tornar sua distância a  $B$  menor que  $1/(4D)$ . Seja  $O$  um ponto que permanecerá fixo durante o resto do processo e que coincide com a posição de  $A$  neste momento; a partir de agora a estratégia de  $A$  será sempre saltar para um ponto do segmento  $OB$  tão próximo de  $B$  quanto possível. É fácil ver que esta estratégia está bem definida, isto é, que é sempre possível a  $A$  manter-se neste segmento. Mais: esta estratégia garante que a distância entre  $A$  e  $B$  nunca aumenta. De fato, sejam  $p_A$  e  $p_B$  as posições em um dado momento; supomos que  $B$  então salta para  $p'_B$  e  $A$  para  $p'_A$ . Sejam  $p''_A$  e  $p''_B$  as projeções ortogonais de  $p_A$  e  $p_B$  na reta que passa por  $O$ ,  $p'_A$  e  $p'_B$  (veja a Figura B). Claramente,  $d(p''_A, p''_B) < d(p_A, p_B)$  e portanto  $d(p'_A, p'_A) > d(p'_B, p'_B)$ , donde  $d(p'_A, p'_B) < d(p_A, p_B)$ , como afirmamos. Falta apenas provar que esta distância torna-se igual a zero após um número finito de jogadas.

Dadas as posições  $p_A$  e  $p_B$  de  $A$  e  $B$  em um dado momento, seja  $p'_B$  um ponto que dista no máximo 1 de  $p_B$  e mais de 1 de  $p_A$ , de tal forma que  $B$  pode mover-se para

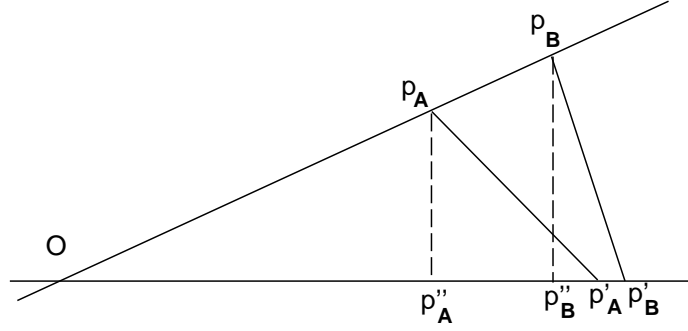


Figura B

$p'_B$  sem ser imediatamente capturado. Como  $d(p'_B, p_A) > d(p'_B, p_B)$ , o ângulo  $\widehat{Op_A p'_B}$  é obtuso. Seja  $k = d(O, p_B)$ . Pela lei dos cossenos,  $d(O, p'_B) > \sqrt{d(O, p_A)^2 + d(p_A, p'_B)^2} > \sqrt{(k - 1/(4D))^2 + 1} > k + 1/(4D)$  (lembre que  $k < D$ ). Assim,  $B$  deve, a cada jogada, afastar-se de  $O$  de pelo menos  $1/(4D)$  sob pena de perder imediatamente. Como a arena é limitada, isto conclui a demonstração.

c. Caso  $\ell_A < \ell_B, d > 0$

Neste caso, se a arena for suficientemente grande, a posição inicial distante dos bordos e a distância inicial entre  $A$  e  $B$  não permitir vitória imediata de  $A$ ,  $B$  tem uma estratégia para manter  $A$  à distância. Um exemplo de estratégia para  $B$  é o seguinte:  $B$  se manterá sobre um grande círculo fixo contido na arena e a cada jogada ele salta, sempre sobre este círculo, de tal forma a aumentar tanto quanto possível sua distância a  $A$ . O jogador  $A$  estará sempre ou longe do círculo por sua distância a  $O$  ser pequena ou terá seu argumento muito diferente do de  $B$  já que, como a velocidade angular de  $A$  ao tentar aproximar-se do círculo é substancialmente menor que a de  $B$ ,  $B$  tem tempo suficiente para afastar-se bastante.

Vamos ilustrar isto com um exemplo. Suponha que  $S$  seja um disco de raio  $100km$ ,  $\ell_A = 1m$ ,  $\ell_B = 1,05m$  e  $d = 10m$ . Suponha ainda que  $B$  está no bordo deste disco e segue a estratégia acima. Na faixa em que a distância de  $A$  ao bordo é menor que  $3km$ , a velocidade angular de  $B$  é maior que a de  $A$ : a cada passo, a distância entre  $B$  e a projeção radial de  $A$  no círculo aumentará de mais de  $1cm$ . Assim, se  $A$  tentar reduzir sua distância ao círculo para menos de  $1km$ , será necessário dar pelo menos 2000 passos nesta faixa e a distância entre  $B$  e a projeção de  $A$  passará a ser de mais de  $20m$ , demonstrando que neste caso  $B$  foge facilmente de  $A$ .

## II. Caso contínuo

No caso discreto os jogadores se movem aos saltos; queremos agora imaginar que os jogadores, ao invés de saltarem alternadamente, movem-se continuamente. Da mesma forma que no caso discreto limitamos o tamanho dos saltos, no caso contínuo limitamos a velocidade dos jogadores. Mais precisamente, a trajetória de  $A$  (resp.,  $B$ ) deve ser derivável por partes (em relação ao tempo) e seu vetor velocidade deve sempre ter módulo menor ou igual a  $v_A$  (resp.,  $v_B$ ).

No mundo real, um jogador não tem informação instantânea sobre a posição de seu adversário: é preciso esperar pelo menos o tempo necessário para a luz ir de um ao outro. Motivados por essa observação, vamos introduzir um ingrediente extra no problema: o *tempo de reação*. Suponhamos assim que cada um dos jogadores tem informação sobre a posição do adversário até um tempo  $f(d)$  anterior, onde  $d$  é a distância entre o jogador e a imagem do adversário. A imagem do adversário é definida como a sua posição no mesmo tempo  $f(d)$  anterior. Observe que  $d$  e a imagem do adversário estão implicitamente definidas por estas condições desde que  $f$  seja crescente e derivável com  $f(0) = 0$  e  $f'(d) \leq 1/(v_A + v_B)$  para todo  $d$ , hipóteses que sempre assumiremos.

### a. Caso $v_B > v_A$

Neste caso,  $B$  consegue manter-se longe de  $A$  para toda  $f$ . A estratégia é análoga ao caso discreto:  $B$  deve manter-se num círculo de raio grande e mover-se com velocidade máxima na direção que o afasta da imagem de  $A$ . A demonstração de que esta estratégia funciona é como no caso discreto. Os detalhes são deixados a cargo do leitor.

### b. Caso $v_B = v_A$ , $d > 0$

Uma estratégia análoga à do caso discreto funciona para o jogador  $A$  qualquer que seja  $f$ . Basta  $A$  andar por um tempo  $d/2v_A$  na direção da imagem de  $B$  e a distância, como no caso discreto, diminuirá, tornando-se eventualmente menor que qualquer número positivo dado. Novamente, deixamos os detalhes como exercício.

c. Caso  $v_B = v_A$ ,  $d = 0$

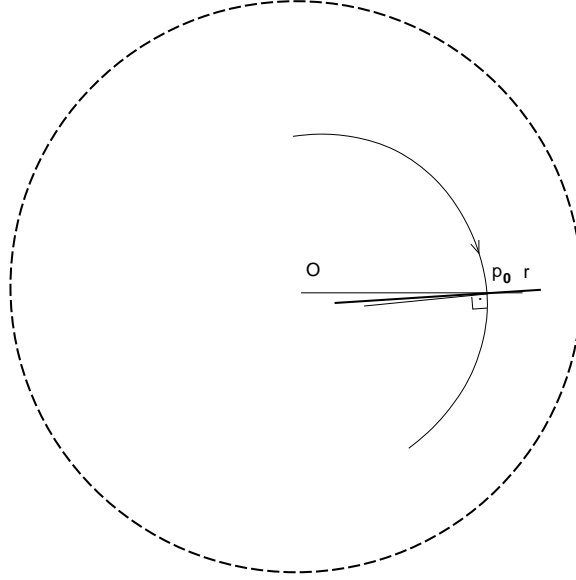
Aqui, tudo depende de  $f$ . Se  $f(d)$  é da forma  $\lambda d$ ,  $B$  tem dificuldade em saber como fugir e (exceto se sempre adivinhar bem) termina por ser alcançado por  $A$ . Entretanto, se  $f(d)/d$  tender a zero quando  $d$  tende a zero,  $A$  nunca alcançará  $B$ .

Neste último caso, passamos a descrever uma boa estratégia para  $B$ . É conveniente trabalhar em coordenadas polares. O jogador  $B$  escolhe uma espiral tendendo para um círculo com concavidade sempre para dentro: por exemplo, a parametrizada por  $r = r_0(1 - 1/(\theta + 2))$ ,  $\theta \in [0, +\infty)$ . Feito isso,  $B$  anda com velocidade máxima nessa espiral sempre que a imagem  $A'$  de  $A$  estiver a uma distância menor que, digamos,  $r_0/2$  e que seu ângulo satisfizer  $\theta_{A'} < \theta_B + f(d)$ . Se  $\theta_{A'}$  chegar a ser  $\theta_B + f(d)$ ,  $B$  passa a percorrer a mesma espiral refletida em relação ao raio que liga a posição nesse instante a  $O$ .

Suponhamos por absurdo que existe uma estratégia para  $A$  que permita alcançar  $B$ . Suponha ainda que tenha ocorrido uma inversão no sentido em que  $B$  corre a espiral. Isto significa que pouco antes da inversão o ângulo  $\theta_{A'}$  da imagem  $A'$  de  $A$  satisfazia  $\theta_{A'} < \theta_B + f(d)$  e no momento da inversão valia a igualdade  $\theta_{A'} = \theta_B + f(d)$ . Como, entretanto, neste momento  $B$  inverteu o sentido de percurso, passamos a ter uma situação equivalente a  $\theta_{A'} = \theta_B - f(d)$ . O jogador  $A$  poderia facilmente, entretanto, reduzindo seu próprio argumento, ter chegado a uma tal posição sem fazer com que  $B$  invertesse o sentido de percurso. Assim, para cada estratégia vitoriosa para  $A$  existe uma outra estratégia, também vitoriosa, para a qual  $B$  nunca inverte o sentido de percurso da espiral. Podemos portanto supor, sem perda de generalidade, que tais inversões não ocorrem e que sempre vale  $\theta_{A'} < \theta_B + f(d)$ .

Ainda supondo que  $A$  alcance  $B$ , seja  $p_0$  o ponto onde  $A$  e  $B$  se encontram em um tempo  $t_0$ . Passando por  $p_0$ , tomemos uma reta  $r$  qualquer contida no ângulo menor formado entre o raio e a perpendicular à espiral, como na Figura C. Consideremos ainda um feixe de retas paralelas a  $r$ , as curvas de nível de uma coordenada auxiliar  $w$  definida como uma função afim das coordenadas usuais. Podemos ainda supor que  $w$  é crescente no tempo para as coordenadas de  $B$  pouco antes do choque.

Sejam  $w_A(t)$  e  $w_B(t)$  as coordenadas  $w$  de  $A$  e  $B$  em um tempo  $t$ : para  $t$  próximo de  $t_0$ , devemos ter  $w_A(t) < w_B(t)$ , pois do contrário teíamos  $\theta_{A'} > \theta_B + f(d)$ , o que contradiz nossas hipóteses. Consideremos então as trajetórias de  $A$  e  $B$  a partir de um instante



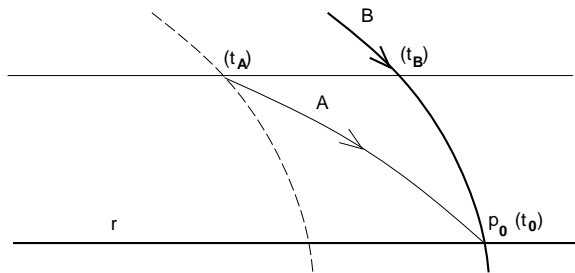
**Figura C**

qualquer  $t_1 < t_0$  já na faixa que garante a desigualdade acima, como mostrado na Figura D. Translade a trajetória de  $B$  paralelamente a  $r$  e consideremos a última interseção da trajetória de  $A$  com esta trajetória transladada. Este ponto de interseção corresponde a tempos  $t_A > t_B$  para  $A$  e  $B$ , respectivamente: a desigualdade vem de  $w_A(t_A) = w_B(t_B)$ . Refletindo a trajetória transladada e a trajetória de  $A$  em  $r$  (como na Figura E), vemos que a trajetória de  $A$  entre  $t_A$  e  $t_0$  é mais longa que a trajetória de  $B$  entre  $t_B$  e  $t_0$ , pois a trajetória de  $A$  duplicada é um arco por fora do arco convexo dado pela trajetória de  $B$  duplicada. Isto é um absurdo, e demonstra que, conforme afirmamos, esta estratégia de  $B$  garante sua vitória.

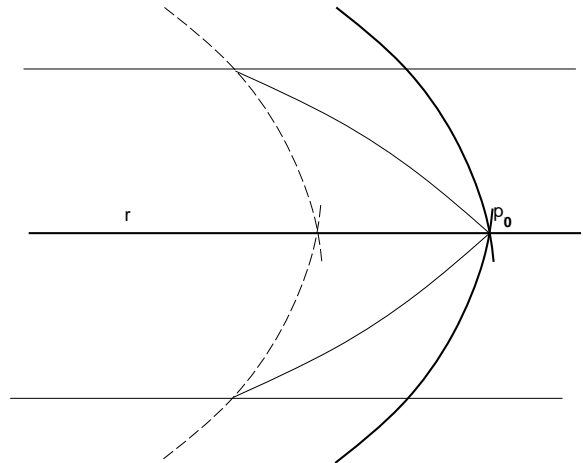
No caso  $f(d) = \lambda d$ , o argumento acima não se aplica pois é impossível construir um feixe de retas com todas as propriedades necessárias. De fato, se  $B$  seguir a estratégia acima e  $A$  perseguir  $B$  sempre perto do limite em que  $B$  muda de sentido,  $A$  alcança  $B$ . Além disso, pode-se provar que, para qualquer estratégia de  $B$  (baseada apenas na informação a que  $B$  tem acesso) existe uma estratégia de  $A$  para a qual  $A$  alcança  $B$ . Por outro lado, pelo que vimos acima, não existe uma estratégia para  $A$  com a qual ele alcance  $B$  qualquer que seja a estratégia adotada por  $B$ .

### Referências:

[F1] J. Flynn, *Pursuit in the circle: lion versus man*, Differential games and control theory,



**Figura D**



**Figura E**

ed. por E. O. Roxin, P. Liu e R. L. Sternberg, Lecture notes in pure and applied mathematics, Marcel Dekker, Inc., New York, 1974.

[Fr] A. Friedman, *Differential games*, Wiley-Interscience, New York, 1971.

[I] R. Isaacs, *Differential games*, the SIAM series in Applied Math., John Wiley, New York, 1965.

[L] J. E. Littlewood, *A mathematician's miscellany*, Methuen, London, 1953 (pp. 135-136).

[KS] N. Krassovski e A. Soubbotine, *Jeux différentiels*, Editions Mir, Moscou, 1977.

Miriam Abdón; e-mail: miriam@impa.br

Carlos Gustavo Tamm de Araujo Moreira; e-mail: gugu@impa.br

Nicolau Corção Saldanha; e-mail: nicolau@impa.br; <http://www.impa.br/~nicolau/>

IMPA, Estr. D. Castorina, 110

Jardim Botânico

Rio de Janeiro, RJ 22460-320, BRASIL