Tópicos em
Jogos
Combinatórios

Nicolau Corção Saldanha

Prefácio

Este é um livro expositório de tópicos em jogos combinatórios. O nível de exigência de prerequisitos varia de seção para seção mas mesmo o leitor sem nenhum prerequisito digno de ser mencionado pode entender a maior parte do livro. Os tópicos mais avançados são os seguintes: um pouco de teoria dos conjuntos, bastando essencialmente ao leitor ter uma idéia intuitiva vaga do que seja um número ordinal exceto para a seção do capítulo 0 em que se discutem jogos que demoram um tempo infinito e um pouco de álgebra, especialmente teoria dos corpos e um entendimento de como são os corpos finitos, para acompanhar a discussão sobre números no final do capítulo 2. O leitor que por qualquer razão não entender uma seção pode (com grande probabilidade de êxito) tentar continuar a partir da próxima.

O final do prefácio é o lugar tradicional para agradecimentos e eu terei o prazer de honrar esta tradição com agradecimentos de várias naturezas. Agradeço ao CNPq e à FINEP pelo apoio dado. Agradeço ao IMPA e à Professora Maria José Pacífico pelo convite para apresentar no 18^o Colóquio Brasileiro de Matemática o curso para o qual estas notas foram escritas. Agradeço às várias pessoas que tiveram o interesse e disposição de discutir comigo tópicos de que falo neste livro, numerosas demais para serem enumeradas sem perigo de erro ou omissão. Agradeço finalmente aos matemáticos que desenvolveram e pesquisaram o material que eu aqui apresento, entre eles especialmente John H. Conway: a ele é devido a grande maioria do material exposto aqui. Àqueles que quiserem saber mais do que o que aparece neste livro eu recomendo a leitura de "On Numbers and Games", de John H. Conway, e "Winning Ways", vols. 1 e 2, de Berlekamp, Conway e Guy.

Nicolau C. Saldanha
Departamento de Matemática, PUC-Rio
Rua Marquês de São Vicente 225
Gávea, Rio de Janeiro
RJ 22453-900, Brasil

nicolau@mat.puc-rio.br
http://www.mat.puc-rio.br/~nicolau/

Capítulo 0
Jogos

Que jogos estudaremos?

Neste livro estudaremos de um modo geral jogos que satisfazem as seguintes condições:

- Há dois jogadores; estes jogadores serão chamados *Esquerda* (L) e *Direita* (R).
- Os jogadores jogam alternadamente, isto é, não existem jogadas simultâneas.
- Os jogadores sabem exatamente qual a situação presente do jogo, isto é, têm informação completa.
- Não são utilizados no jogo dados ou outros dispositivos aleatórios.
- A qualquer momento o conjunto de jogadas legais para um jogador está bem definido e do conhecimento de todos e cabe ao jogador escolher a sua jogada.
- Há um critério bem definido e previamente conhecido dos jogadores para determinar quando o jogo acabou.
- Ao final do jogo há um resultado bem definido segundo um critério previamente conhecido dos jogadores. Em geral, este resultado será a vitória de um ou outro jogador, podendo em alguns jogos ser empate.

Alguns exemplos populares de jogos satisfazendo estas condições são **xadrez** e **jogo da velha**. Existe uma diferença importante entre estes dois jogos. Qualquer um que tenha jogado jogo da velha algumas vezes acaba aprendendo que o jogo "sempre empata". Esta afirmação, obviamente falsa se tomada literalmente, significa que cada jogador pode, jogando bem, garantir pelo menos o empate. Ou seja, existem **estratégias** para cada jogador que, se seguidas, garantem para cada jogador o empate ou (às vezes e se o outro jogador jogar mal) a vitória. No caso do jogo da velha tais estratégias são fáceis de encontrar. Será que existem estratégias semelhantes para o xadrez?

Antes de considerar esta pergunta, vejamos alguns outros exemplos de jogos populares para ver se satisfazem nossas condições. **Go**, **damas** e **xadrez chinês** são exemplos de jogos que satisfazem nossas condições. Quase todos os jogos de cartas usuais envolvem dispositivos aleatórios (a arrumação inicial das cartas) e informação incompleta (cartas que um jogador não pode ver). Qualquer jogo que envolva dados, como **gamão** ou **jogo da Glória**, usa um dispositivo aleatório; de fato, no segundo exemplo, o resultado do dado define todo o jogo. Jogos no sentido esportivo do termo, como **tênis** ou **boxe** estão fora de questão porque o conjunto de jogadas legais em um certo momento não está claramente definido mas mesmo na medida em que estiver não se pode dizer que o jogador escolha sua jogada dentro deste conjunto de jogadas legais.

Vejamos agora alguns outros exemplos de jogos que satisfazem nossas condições; estes jogos serão estudados a seguir. O jogo **nim** é jogado da seguinte maneira: forme um número qualquer de fileiras de palitos de fósforo, sendo que em cada fileira há um número qualquer de palitos.

Na sua vez cada jogador tira quantos palitos quiser de uma fileira; ele deve tirar pelo menos um palito e pode tirar até todos os palitos da fileira se quiser mas nunca pode mexer em duas fileiras na mesma jogada. Perde aquele jogador que na sua vez de jogar não puder jogar por todas as fileiras estarem vazias; ou seja, ganha quem tirar o último palito. Este jogo é de fato jogado por pessoas que nunca tentaram estudá-lo matematicamente; descreveremos a seguir sua teoria completa. Esta convenção de que um jogador perde quando lhe é impossível jogar é conveniente e será usada em muitos casos. Entretanto, a versão mais popular do jogo nim é aquela em que quem tira o último palito *perde*; também estudaremos esta versão do jogo. Veremos a seguir muitos jogos semelhantes ao nim.

Definições de Jogo

Vejamos agora como faríamos para formalizar a idéia de um jogo. Devemos ter um conjunto de *posições* possíveis no jogo e para cada posição devemos ter um conjunto de jogadas permitidas para cada jogador. Mas como uma jogada nos leva simplesmente a outra posição x podemos pensar que a cada posição temos associados dois conjuntos de posições $L(x)$ e $R(x)$ que designam as posições para as quais Esquerda ou Direita podem andar na sua jogada. Chamaremos um elemento de $L(x)$ de uma opção à esquerda de x e analogamente um elemento de $R(x)$ de uma opção à direita de x. Algumas jogadas devem levar ao fim do jogo; podemos pensar nestas jogadas como sendo jogadas para posições especiais, que poderíamos chamar de posições terminais. Assim, cada posição terminal corresponderia a um resultado final do jogo. Poderíamos assim formalizar um jogo como um conjunto P de posições dentro do qual temos um subconjunto $T \subseteq P$ de posições terminais juntamente com duas funções L e R de $P - T$ em $\mathcal{P}(P)$, o conjunto das partes de P.

Esta primeira tentativa de definição é complicada sob vários aspectos: seria bom ter uma definição com menos ingredientes. Por outro lado, esta definição apresenta um problema sério: quase qualquer "jogo" no sentido definido acima tem a tendência a não acabar nunca. Deveríamos ter meios de garantir algum tipo de "convergência" para o conjunto T. Diremos que um jogo é *infundado* se existir uma seqüência de posições não terminais $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$ com $p_{i+1} \in L(p_i) \cup R(p_i)$, ou seja, se existir uma seqüência infinita de jogadas legítimas nunca chegando a uma posição terminal. A definição acima permite jogos infundados. Um jogo não infundado será chamado um jogo bem fundado. Uma terceira observação importante é a seguinte: se duas posições não terminais x e x' têm a propriedade de que $L(x) = L(x')$ e $R(x) = R(x')$ então tais posições são inteiramente equivalentes para fins do jogo. Poderíamos assim sem grande prejuízo para a teoria considerar duas tais posições como sendo *iguais*. Finalmente, se adotarmos a convenção de que um jogador perde quando não pode jogar então a necessidade de posições terminais desaparece.

Todas as considerações acima devem servir de justificativa e motivação para a seguinte definição, que é aquela utilizada em ONAG e WW. Um jogo x é formado por alguns elementos à esquerda chamados tipicamente de x_L e alguns elementos à direita chamados tipicamente de x_R. Escrevemos

$$x = \{\ldots, x_L, \ldots | \ldots, x_R, \ldots\}$$

com uma analogia óbvia com a notação de conjunto. Queremos, além disso, que os elementos à esquerda ou direita sejam eles próprios jogos. Poderíamos dizer que um jogo é um par ordenado de conjuntos de jogos. Esta definição não invoca posições terminais; estamos assim implicitamente usando a convenção de que um jogador perde quando não pode jogar. Além disso esta definição identifica posições que tenham as mesmas opções à esquerda e à direita considerando a posição como sendo um objeto montado a partir de suas opções exatamente como um conjunto é montado a partir de seus elementos. A outra dificuldade levantada, a existência de jogos infundados, também foi de certa forma automaticamente resolvida, como veremos adiante.

Vejamos agora alguns exemplos de jogos segundo esta definição. No início não temos jogo nenhum ainda e podemos montar apenas o seguinte jogo:$\{|\}$; chamaremos este jogo de 0. Podemos agora montar mais três jogos que receberão os seguintes nomes: $1 = \{0|\}$, $-1 = \{|0\}$ e $* = \{0|0\}$. A partir destes quatro jogos podemos formar mais 252, como o leitor poderá facilmente verificar. Alguns deles são $2 = \{0, 1|\}$, $-2 = \{|-1, 0\}$, $\frac{1}{2} = \{0|1\}$, $-\frac{1}{2} = \{-1|0\}$, $*2 = \{0, *|0, *\}$, $\uparrow = \{0|*\}$, $\downarrow = \{*|0\}$, $1 + * = \{1, *|1\}$ e $-1 + * = \{-1|-1, *\}$.

Apesar de que esta definição seja excelente sob vários aspectos, não a tomaremos necessariamente como a única; quando for necessário explicitar que estamos usando esta definição falaremos de um ONAG-jogo. Uma modificação desta definição para não tornar obrigatória a convenção de que o jogador perde quando lhe é impossível jogar consistiria em imaginar que antes de iniciar esta construção já tínhamos alguns objetos iniciais dados, que não têm elementos, e que seriam os resultados de um jogo terminado.

Há uma simplificação interessante que pode ser feita no caso de estarmos considerando apenas um jogo isolado. Afinal, se Esquerda acaba de jogar, a próxima jogada é de Direita: que sentido faz então considerar as opções de Esquerda para uma tal posição? A razão para considerar tais opções deverá tornar-se óbvia quando estudarmos somas de jogos a seguir mas de fato se nosso interesse for estudar *um* jogo tal consideração é supérflua. Poderíamos assim considerar um jogo como sendo simplesmente um conjunto de jogos; mas isto reduz a noção de jogo à noção de conjunto! Se nosso jogo for finito, no sentido de que o número total de posições alcançáveis é finito, podemos codificar nosso jogo com um número natural. (Sempre que falarmos em número natural isto inclui 0.) Basta para isso observar que para caracterizar um jogo, basta caracterizar suas opções, e para caracterizar um natural basta escrevê-lo em base 2, ou seja, escrever $n = \sum_{m \in A} 2^m$ onde A é um conjunto finito de naturais. Assim, se o jogo x tem opções x_i onde x_i corresponde ao natural n_i fazemos x corresponder ao natural $\sum 2^{n_i}$. Voltaremos a considerar estes números logo adiante.

Existência de Estratégia

Devemos agora voltar e preencher uma lacuna enorme que foi deixada acima. O jogo da velha admite estratégias que garantem o empate. Será que algo semelhante vale para qualquer jogo? A resposta é dada pelo teorema abaixo.

Teorema: Considere um jogo bem fundado com resultados finais possíveis em um conjunto totalmente ordenado finito X. A ordem indica as preferências de Esquerda, ou seja, Esquerda prefere os resultados maiores e Direita prefere os resultados menores. Então dado quem começa o jogo existe um valor $x_0 \in X$ e estratégias η_L e η_R para Esquerda e Direita respectivamente com as seguintes propriedades:

- Se Esquerda seguir a estratégia η_L então o resultado final será maior ou igual a x_0 quaisquer que sejam as jogadas de Direita.

- Se Direita seguir a estratégia η_R então o resultado final será menor ou igual a x_0 quaisquer que sejam as jogadas de Esquerda.

Em particular, se o resultado for necessariamente a vitória de um dos jogadores então ou existe uma jogada η_L que garante a vitória para Esquerda ou existe uma jogada η_R que garante a vitória para Direita.

Antes de demonstrar este resultado temos de saldar uma dívida e definir o que é uma estratégia: uma estratégia para Esquerda é uma função que a cada posição de um jogo atribui uma de suas opções à Esquerda, a definição para Direita sendo análoga. Dizemos que Esquerda joga segundo uma estratégia se em uma posição sempre escolhe a opção dada pelo valor da função estratégia naquela posição.

Demonstração:

Vamos atribuir a cada posição do jogo um valor em X; observe que como está dado quem será o primeiro a jogar podemos supor dado a partir de cada posição quem será o próximo a jogar. Atribuímos a cada posição terminal o valor igual ao resultado correspondente. Dados os valores de todas as opções de uma posição definimos o valor da posição como sendo o máximo dentre estes valores se for a vez de Esquerda jogar e o mínimo se for a vez de Direita jogar. Afirmamos que sendo o jogo bem fundado este procedimento atribuirá valores a todas as posições, inclusive a inicial.

Aceitando esta afirmação por um momento, x_0 é o valor da posição inicial, a estratégia η_L é dada por qualquer função que sempre escolher uma opção com valor máximo e a estratégia η_R é dada por qualquer função que sempre escolher uma opção com valor mínimo. É fácil ver que x_0, η_L e η_R satisfazem às condições do teorema. De fato, uma jogada qualquer de Esquerda nunca aumenta o valor da posição enquanto uma jogada segundo a estratégia η_L mantem este valor inalterado. Analogamente, uma jogada qualquer de Direita nunca diminui o valor da posição enquanto uma jogada segundo a estratégia η_R mantem este valor inalterado. Assim, se Esquerda seguir a estratégia η_L qualquer que seja o comportamento de Direita o valor só poderá aumentar ou ficar constante, sendo portanto o resultado final maior ou igual a x_0. Analogamente, se Direita seguir a estratégia η_R qualquer que seja o comportamento de Esquerda o valor só poderá diminuir ou ficar constante, sendo portanto o resultado final menor ou igual a x_0. Isto conclui a demonstração a menos da afirmação acima.

Suponha por absurdo que as regras acima não sejam suficientes para atribuir um valor à posição p_0. Deve assim existir uma opção p_1 de p_0 para a qual seja impossível atribuir um valor. Repetindo o raciocínio devem existir posições p_2, p_3, ...,p_i, ... para as quais é impossível atribuir um valor onde p_{i+1} é uma opção de p_i. Mas isto contraria a hipótese do jogo ser bem fundado e conclui a demonstração do teorema. ∎

Voltemos agora a considerar jogos segundo a definição ONAG. Será verdade que todo jogo neste sentido é bem fundado? Podemos conceber a possibilidade de um jogo $X = \{X|\}$; este jogo seria infundado. Mas em certo sentido um tal jogo é análogo a um conjunto $A = \{A\}$; tais conjuntos são em geral considerados objetos "ilegais". De fato, um dos axiomas usuais da teoria dos conjuntos é o Axioma da Fundação que diz que não existem conjuntos A_i com $A_0 \ni A_1 \ni \ldots \ni A_i \ni \ldots$. Podemos adotar um axioma análogo para ONAG-jogos. Este axioma é equivalente a dizer que todos os ONAG-jogos são criados a partir do nada como nos exemplos que vimos acima. A menos de menção em contrário, assumiremos o Axioma da Fundação para ONAG-jogos.

A partir da observação acima e do teorema temos uma classificação de ONAG-jogos em quatro classes com representantes típicos 0, 1, -1 e $*$. Uma classe é aquela dos jogos em que quem começa perde, seja Esquerda ou Direita (ou, mais precisamente, em que o segundo a jogar tem uma estratégia que lhe garante a vitória); o exemplo mais simples é 0 e quando um jogo A for desta classe escreveremos $A = 0$ (o sinal de igual deve parecer inapropriado agora mas seu uso será justificado mais adiante). Outra classe é aquela dos jogos em que Esquerda ganha qualquer que seja o jogador a começar; o exemplo mais simples é 1 e quando um jogo A for desta classe escreveremos $A > 0$. Outra classe é aquela dos jogos em que Direita ganha; o exemplo mais simples é -1 e quando um jogo A for desta classe escreveremos $A < 0$. Finalmente, existem aqueles jogos em que quem começa ganha; o exemplo mais simples é $*$ e quando um jogo A for desta classe escreveremos $A \| 0$.

Jogos de Tempo Infinito e o Axioma da Determinação

Até agora temos considerado apenas jogos que acabam em tempo finito, ainda que não necessariamente limitado. No restante do livro também consideraremos apenas jogos deste tipo mas nesta secção faremos um parêntesis no qual consideraremos jogos que demoram um tempo de fato infinito para serem jogados.

Seja $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ o conjunto de todas as funções de $\mathbf{N}$ em $\mathbf{N}$. Seja $A \subseteq \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$. Dois jogadores L e R jogam da seguinte forma: L escolhe $f(0)$, R escolhe $f(1)$, L escolhe $f(2)$ e assim sucessivamente. Depois de infinitas jogadas estará definida uma $f \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$. O vencedor será L se $f \in A$; caso contrário o vencedor será R. Agora o fato surpreendente: para alguns conjuntos A *nenhum dos dois jogadores tem uma estratégia que lhe garanta a vitória.*

Vejamos a demonstração deste fato. Observe que uma estratégia é uma função que associa a cada seqüência finita de naturais um natural. O conjunto de seqüências finitas de naturais é enumerável logo o conjunto das estratégias tem a cardinalidade de $\mathbf{R}$. Seja κ o menor ordinal com a cardinalidade de $\mathbf{R}$. Usando o princípio da boa ordenação, podemos chamar as estratégias de L de l_α e as estratégias de R de r_α onde α é um ordinal menor do que κ. Vamos agora construir um conjunto A com a propriedade acima usando um conjunto auxiliar B disjunto de A. Considere a estratégia l_0: em alguma situação L deve perder com esta estratégia, ou seja, deve existir alguma estratégia para A tal que a função obtida a partir destas duas estratégias não esteja em A. Escolha assim uma estratégia qualquer de R e acrescente a função obtida a partir dessas duas estratégias a B. No próximo passo queremos invalidar r_0; se existir alguma estratégia de L tal que o resultado de confrontá-la com r_0 não esteja já em B podemos acrescentar este resultado a A. Prosseguimos assim eliminando l_1, r_1, ..., l_α, r_α, $l_{\alpha+1}$,... por este processo até termos eliminado todas as estratégias. Teremos assim construído o conjunto A que queríamos. Falta assim mostrar que a cada passo é possível eliminar a próxima estratégia.

Suponha assim que queiramos eliminar um l_α, o raciocínio sendo análogo para r_α. Observe que pela construção até agora A e B têm cardinais menores do que o cardinal de $\mathbf{R}$. Entretanto é imediato verificar que o cardinal do conjunto dos possíveis resultados de jogar l_α contra as várias estratégias possíveis de R é igual ao cardinal de $\mathbf{R}$. Assim, algum resultado não está ainda em A e podemos portanto acrescentá-lo a B invalidando l_α. Isto conclui a construção de A.

Este resultado é surpreendente: afinal, toda a informação está ali e um dos jogadores vai ganhar. Não seria natural de se supor que jogando sabiamente um dos jogadores ganhasse? Vimos, entretanto, que não. Podemos entretanto ser mais cuidadosos: usamos nesta demonstração o Axioma da Escolha para dar uma boa ordem a um conjunto não enumerável, de cardinalidade igual à de $\mathbf{R}$. Não seria razoável desistir do Axioma da Escolha pelo menos na sua versão forte usual para impedir este tipo de comportamento? Esta possibilidade já foi estudada em teoria dos conjuntos. O axioma alternativo segundo o qual todo jogo do tipo acima admite uma estratégia para algum dos jogadores chama-se o

Axioma da Determinação. Acredita-se que este axioma seja consistente com os axiomas de Zermelo-Fraenkel e já foram obtidas algumas conseqüências deste axioma, entre elas a não existência de conjuntos não mensuráveis de reais. Este axioma *não* é aceito na matemática usual.

Numeração de Jogos

Voltamos agora a considerar a idéia mencionada acima de associar com um jogo finito um natural que o descreve. Lembre que a partir da posição $n = \sum 2^{n_i}$ as opções legais são os n_i. Podemos agora dividir os naturais em duas classes: aqueles em que quem começa perde e aqueles em que quem começa ganha. Para melhor visualização, pensemos que vamos pintar de vermelho aqueles naturais em que quem começa perde e de azul aqueles em que quem começa ganha. Assim, $n = \sum 2^{n_i}$ é pintado de vermelho se e somente se todos os n_i são pintados de azul. Observe que n e 2^n têm sempre cores opostas; existem portanto infinitos vermelhos e infinitos azuis. Os primeiros naturais são pintados como na figura.

Vamos agora tentar estimar a proporção de naturais de cada cor. Definimos $NV(n)$ como o número de naturais vermelhos estritamente menores que n. É fácil verificar que

$$NV(2^n) = 2^{n-NV(n)}.$$

De fato, os 2^n primeiros naturais são aqueles que podem ser escritos com n algarismos. Para formar um natural vermelho devemos escolher algarismos 0 ou 1 para as n primeiras posições com a restrição que os algarismos correspondentes às casas vermelhas, isto é, aquelas casas de ordem vermelha, devem necessariamente ser 0. Temos portanto $n - NV(n)$ escolhas a fazer e daí segue a equação acima.

A partir desta equação obteremos estimativas para $NV(n)$. Escreveremos $f(n) < g(n)$ para dizer que tal desigualdade vale para n suficientemente grande e $f(n) \ll g(n)$ para $\lim_{n\to+\infty} f(n)/g(n) = 0$. Já sabemos que $A \ll NV(n)$ onde A é uma constante. Se m é um múltiplo de 2^n temos $NV(m) \leq m2^{-NV(n)}$. Obtemos daí $NV(n) \ll \epsilon n$ para todo $\epsilon > 0$. Aplicando tal desigualdade na equação temos $NV(2^n) = 2^{n-NV(n)} > 2^{n-\epsilon n} = (2^n)^{1-\epsilon}$. Como isto vale para qualquer valor de $\epsilon > 0$, $n^{1-\epsilon} \ll NV(n) \ll \epsilon n$. A partir daí $NV(2^n) = 2^{n-NV(n)} < 2^{n-n^{1-\epsilon}} = (2^n)^{1-(\log_2(2^n))^{-\epsilon}}$. Como no caso anterior, $n^{1-\epsilon} \ll NV(n) \ll n^{(1-(\log_2(n))^{-\epsilon}} \ll \epsilon n$. Podemos repetir este processo obtendo uma seqüência de estimativas dadas por funções $f_i(n)$ dependentes de um parâmetro $\epsilon > 0$ satisfazendo $f_{2i}(n) \ll f_{2i+2}(n) \ll NV(n) \ll f_{2i+3}(n) \ll f_{2i+1}(n)$. Podemos tomar $f_0(n) = -\log_2 \epsilon$, $f_1(n) = \epsilon n$ e $f_{i+1}(n) = 2^{(\log_2(n) - f_i(\log_2(n)))}$.

Operações com Jogos

Vejamos agora algumas operações que podemos efetuar com jogos. Se X é um jogo definimos $-X$ como o jogo obtido invertendo os papéis de Direita e Esquerda em X. Se

$X = \{X_L|X_R\}$ é um ONAG-jogo temos $-X - \{-X_R| - X_L\}$; isto pode ser tomado como uma definição recursiva. Temos trivialmente $-(-X) = X$. Observe que o nome -1 para $\{|0\}$ é consistente com $1 = \{0|\}$; observe também que $-* = *$.

Outra operação mais interessante é a soma. Somamos dois jogos X e Y da seguinte forma: em $X + Y$ os jogadores jogam os dois jogos simultaneamente podendo um jogador escolher a cada jogada em qual dos dois jogos mover. Esta operação é especialmente interessante para ONAG-jogos: neste caso podemos definir recursivamente $X+Y = \{X_L + Y, X + Y_L|X_R + Y, X + Y_R\}$. Observe que $0 + X = X + 0 = X$, como podemos provar facilmente por indução: $0 + X = \{0 + X_L|0 + X_R\}$, mas como X_L e X_R são opções de X devem necessariamente ter sido criados antes de X e podemos portanto supor que o resultado vale para eles. Podemos assim escrever $0+X = \{0+X_L|0+X_R\} = \{X_L|X_R\} = X$ e analogamente para $X + 0 = X$. Este tipo de demonstração por indução será utilizada constantemente quando lidarmos com ONAG-jogos. Provamos, por exemplo, que $X+Y = Y + X$ escrevendo $X + Y = \{X_L + Y, X + Y_L|X_R + Y, X + Y_R\} = \{Y + X_L, Y_L + X|Y + X_R, Y_R + X\} = Y + X$. Vejamos agora a associatividade: $X + (Y + Z) = \{X_L + (Y + Z), X+(Y+Z)_L|X_R+(Y+Z), X+(Y+Z)_R\} = \{X_L+(Y+Z), X+(Y_L+Z), X+(Y+Z_L)|X_R + (Y + Z), X + (Y_R + Z), X + (Y + Z_R)\} = \{(X_L + Y) + Z, (X + Y_L) + Z, (X + Y) + Z_L|(X_R + Y) + Z, (X + Y_R) + Z, (X + Y) + Z_R\} = (X + Y) + Z$. Podemos ainda mostrar por indução que $-(X + Y) = (-X) + (-Y)$.

Teoria Elementar dos ONAG-Jogos

O leitor talvez espere que $X + (-X) = 0$. O leitor está meio certo: não está inteiramente certo pois, por exemplo, $1 + (-1) = \{-1|1\}$ não é literalmente igual a $\{|\}$. Mas talvez ele se lembre que escrevíamos $X = 0$ quando quem começa perde, e certamente no jogo $\{-1|1\}$ quem começa perde, como o leitor pode verificar facilmente. Mais do que isso, no jogo $X + (-X)$ quem começa perde pois o segundo jogador tem uma estratégia muito simples para ganhar: basta imitar cada jogada de seu adversário no outro jogo. Assim, se Esquerda começa jogando para $X_L + (-X)$, direita responde com $X_L + (-X_L)$ e se começa jogando $X + (-X_R)$ direita responde $X_R + (-X_R)$. Ou seja, $X + (-X) = 0$ segundo a notação introduzida acima.

O uso do sinal "=" agora pede justificativa. Podemos extender o uso deste sinal dizendo que $X = Y$ se e somente se $X + (-Y) = 0$. A justificativa vem (em parte) de que esta é uma relação de equivalência. Acabamos de demonstrar a reflexividade. A simetria é quase óbvia: $X + (-Y) = -(Y + (-X))$ e verificamos facilmente que $A = 0$ implica $-A = 0$. A transitividade também parece de fácil verificação: se $X + (-Y) = 0$ e $Y + (-Z) = 0$ então $X + (-Z) = X + (-Z) + Y + (-Y) = (X + (-Y)) + (Y + (-Z)) = 0$. Mas devemos ter cuidado! Estamos usando aqui implicitamente usando "=" como a igualdade, coisa que a esta altura ainda não podemos fazer. Vamos temporariamente utilizar o sinal $\sim$ para esta relação que pretendemos mostrar que é de equivalência.. Vamos assim reescrever o argumento acima com mais cuidado. Sabemos que $X + (-Y) \sim 0$ e $Y + (-Z) \sim 0$. Gostaríamos de concluir que $X + (-Y) + Y + (-Z) \sim 0$, ou seja, precisamos saber que se $A \sim 0$ e $B \sim 0$ então $A + B \sim 0$. Isto de fato ocorre pois basta ao segundo jogador responder na mesma componente em que seu adversá rio acaba de jogar. Gostaríamos agora de concluir que $(X+(-Z))+(Y+(-Y)) \sim 0$, o que podemos fazer pois $X + (-Y) + Y + (-Z) = (X + (-Z)) + (Y + (-Y))$. Finalmente, gostaríamos de cancelar $Y + (-Y)$ para concluir que $X + (-Z) \sim 0$. Ou seja, precisamos mostrar que se $A \sim 0$ e $A + B \sim 0$ então $B \sim 0$. Suponha por absurdo o contrário: então existe uma estratégia para um dos jogadores, digamos Esquerda, que lhe garante a vitória em B se começar. Vamos mostrar que a partir daí obtemos uma estratégia pela qual Esquerda começa em $A + B$ e ganha: Esquerda começa jogando em B segundo sua estratégia para ganhar em B. Cada vez que Direita jogar em A ele responde em A no papel de segundo jogador; cada vez que Direita jogar em B ele responde em B segundo sua estratégia para ganhar B. Isto contradiz a hipótese de $A + B \sim 0$ e conclui a demonstração da transitividade de "$\sim$".

Se quisermos pensar em "$\sim$" como igualdade devemos mostrar que "$+$" e "$-$" estão bem definidas. Ou seja, devemos mostrar que se $X \sim X'$ e $Y \sim Y'$ então $X+Y \sim X'+Y'$ e $-X \sim -X'$. Ou seja, devemos mostrar que $X+Y+-(X'+Y') \sim 0$ e $(-X)+-(-X') \sim 0$. Estes dois fatos são de fácil verificação: $X+Y+-(X'+Y') = (X+(-X'))+(Y+(-Y'))$ e $(-X) + -(-X') = -(X + (-X'))$.

Podemos agora pensar em um (novo tipo de) jogo como sendo uma classe de equivalência por "$\sim$". A classe destes jogos vem equipada com uma operação "$+$" que merece seu nome pois com ela a classe dos jogos é um grupo abeliano. Podemos assim escrever $A - B$ para $A + (-B)$. Definimos $A < B$ se e somente se $A - B < 0$, $A > B$ se e somente se $A - B > 0$ e $A \| B$ se e somente se $A - B \| 0$. É evidente que dados A e B vale exatamente uma das quatro relações acima. Escreveremos $A \leq B$ para $A < B$ ou $A = B$ e $A \geq B$ para $A > B$ ou $A = B$.

Devemos mostrar que estas relações estão bem definidas, ou seja, que $x \sim x'$, $y \sim y'$ e $x < y$ implicam $x' < y'$ e analogamente para as outras relações. Mas isto segue de que se $x \sim 0$ então y e $y + x$ são do mesmo tipo, como se pode verificar facilmente em cada caso: por exemplo, se $y > 0$ isto significa que Esquerda tem uma estratégia para vencer o jogo y; para vencer $y + x$ basta a Esquerda seguir esta estratégia na componente y ignorando x exceto quando Direita jogar em x: nesta situação Esquerda responde em x como se fosse o segundo jogador. Isto dá uma estratégia para Esquerda vencer $y + x$ provando que $y + x > 0$. Os demais casos são inteiramente análogos.

Devemos finalmente justificar a notação "$\leq$" mostrando que esta relação é uma ordem parcial compatível com a adição, isto é, que $x \leq y$ implica $x + z \leq y + z$. A reflexividade de "$\leq$" é óbvia pois equivale a dizer que $x - x \leq 0$; a antissimetria corresponde a dizer que $x - y \leq 0$ e $y - x \leq 0$ implicam $x - y = 0$; a transitividade é equivalente a $x - y \leq 0$ e $y - z \leq 0$ implicarem $(x - y) + (y - z) \leq 0$, ou seja, devemos provar que $x \leq 0$ e $y \leq 0$ implicam $x + y \leq 0$, o que é facilmente verificado por indução. A compatibilidade com a adição é trivial.

Capítulo 1
Números

Jogos e Números

Neste e no próximo capítulo utilizaremos sistematicamente a noção ONAG de um jogo identificando jogos equivalentes. Diremos que um jogo é um número se todas as suas opções são números e nenhuma opção à direita é menor ou igual a nenhuma opção à esquerda; ou seja, x é um número se x_L e x_R são números com $x_R \not\leq x_L$. Diremos que $x \leq y$ se e somente se nunca acontecer $y \leq x_L$ ou $y_R \leq x$. Dizemos que $x = y$ se e somente se $x \leq y$ e $y \leq x$. Estas definições são casos particulares do que vimos para jogos. Finalmente, definimos $x + y$ da mesma forma que o fazemos para jogos, ou seja, $x + y = \{x_L + y, x + y_L | x_R + y, x + y_R\}$.

É interessante como estas definições são suficientes para criar tanta coisa de forma tão simples. Os números assim criados são chamados de números surreais; vamos adiar um pouco seu estudo para fazer um breve paralelo com os métodos mais clássicos de construir números. Mas antes, alguns exemplos. Já vimos $0 = \{|\}$, $1 = \{0|\}$ e $2 = \{0,1|\}$. Temos também $\omega = \{0, 1, 2, \ldots |\}$, o número infinito mais simples. Podemos fazer $\{0, 1, 2, \ldots |\omega\}$, que será chamado $\omega - 1$ e $\{0, 1, 2, \ldots |\omega - 1, \omega\} = \omega - 2$; $\{0, 1, 2, \ldots | \ldots, \omega - 2, \omega - 1, \omega\}$ será chamado de $\omega/2$; $\{0, 1, 2, \ldots | \ldots, \omega/4, \omega/2, \omega\}$ será chamado de $\sqrt{\omega}$. Por outro lado, $\{0| \ldots, 1/4, 1/2, 1\}$ será chamado de $1/\omega$; $\{0|1/\omega\}$ será $1/2\omega$ e $\{1/\omega| \ldots, 1/4, 1/2, 1\}$ será $2/\omega$.

Construção de Números Naturais, Ordinais e Reais

Comecemos considerando como poderíamos construir os naturais. O seguinte processo é devido a Von-Neumann: cada natural será igual ao conjunto de seus predecessores. Assim teremos, por exemplo, $0 = \{\}$, $1 = \{0\} = \{\{\}\}$, $2 = \{0, 1\} = \{\{\}, \{\{\}\}\}$. Podemos definir recursivamente um natural como sendo um conjunto finito n de naturais tal que se $l \in m \in n$ então $l \in n$. Denotamos o conjunto dos naturais por $\mathbf{N}$. Omitindo a condição de que o conjunto deva ser finito, temos uma definição recursiva de um ordinal. (O leitor que não souber o que é um ordinal (e quiser aprender) pode consultar um dos livros de teoria dos conjuntos indicados na bibliografia.) Assim, $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\omega + 1 = \{0, 1, 2, \ldots, \omega\}, \ldots$. Chamaremos a classe dos ordinais de **On**.

Estes processos constroem números novos a partir de números velhos mas só avançam, nunca recuam. O processo usual de construir os reais a partir dos racionais com cortes de Dedekind é de certa forma semelhante pois constrói números novos a partir de velhos mas tem uma importante diferença: cerca o número pelos dois lados. Denotamos o conjunto dos reais por $\mathbf{R}$. Este processo não é tão "solto" quanto aquele que usamos para construir os ordinais: não podemos repetir o processo para criar números entre zero e todo real positivo. Podemos sonhar com um processo que unifique e generalize as construções dos reais e ordinais: este é o processo de construção dos surreais, que começamos a descrever acima e estudaremos a seguir. Chamaremos a classe dos surreais de **No**.

CUIDADO:No não é um conjunto!

Antes de prosseguir, uma advertência. Todos conhecemos o perigo de considerar o conjunto dos conjuntos que não pertencem a si próprios. É igualmente perigoso considerar o conjunto de todos os ordinais: este conjunto seria um ordinal e portanto pertenceria a si mesmo, problemas vários surgindo daí. A solução usual é dizer que há ordinais demais, eles não "cabem" em um conjunto. Dizemos que os ordinais formam uma classe própria, que é uma coleção grande demais para ser um conjunto. Com mais forte razão os surreais formarão uma classe própria: estamos assim proibidos de falar do "conjunto de todos os surreais".

Propriedades Básicas dos Números Surreais

Agora que já temos todas as definições podemos demonstrar as propriedades mais básicas. Parte do trabalho já foi feito no contexto mais geral de jogos. Sabemos assim, por exemplo, que a igualdade é uma relação de equivalência e que a soma e as desigualdades estão bem definidas. Sabemos ainda que a soma é associativa, comutativa, que 0 é elemento neutro para a soma, que $-x$ é o inverso aditivo de x, que a relação de "$\leq$" define uma ordem parcial, ou seja, que é reflexiva, antissimétrica e transitiva e que a soma é compatível com a ordem, ou seja, que $y \leq z$ implica $x + y \leq x + z$.

O que mais gostaríamos de provar? Queremos provar que 0 e 1 são números, que se x e y são números, $x + y$ e $-x$ também são números e que a ordem dada por "$\leq$" é total quando restrita a números. Novamente, todas estas propriedades serão demonstradas por indução.

A demonstração de que 0 é um número é trivial: todas as opções são números simplesmente porque não há opções e a condição sobre desigualdade das opções vale pela mesma razão. A partir daí a demonstração de que 1 é um número é igualmente trivial. Para provar que se x é um número então $-x$ é um número escrevemos $-x = \{-x_R | -x_L\}$; estas opçõs são números por hipótese de indução e não podemos ter $-x_L \leq -x_R$ pois isto implicaria $x_R \leq x_L$ o que contraria a hipótese de x ser um número.

Provemos agora que a ordem é total entre números. Basta provar que para qualquer número x temos $x \leq 0$ ou $x \geq 0$. Suponha $x \not\leq 0$ e $x \not\geq 0$. De $x \not\leq 0$ temos $x_L \geq 0$ para algum x_L e de $x \not\geq 0$ temos $x_R \leq 0$ para algum x_R. Isto significa que $x_R \leq x_L$ e portanto x não é um número, concluindo a demonstração.

Antes de prosseguir, vamos mostrar que se x é um número sempre temos $x_L < x < x_R$. Por simetria, basta provar que $x_L < x$. Pelo que acabamos de ver basta mostrar que

$x \not\leq x_L$, mas para isso basta exibir uma opção à esquerda de x que seja maior ou igual a x_L: podemos tomar esta opção como o próprio x_L.

Finalmente, para provar que a soma de dois números é um número, vamos escrever $x + y = \{x_L + y, x + y_L | x_R + y, x + y_R\}$. Como isto poderia deixar de ser um número? Podemos supor por indução que todas as opções são números. Assim, a única maneira pela qual $x + y$ poderia não ser um número seria se uma opção direita fosse menor ou igual a uma opção esquerda. Claramente não podemos ter $x_R + y \leq x_L + y$ pois isto implicaria $x_R \leq x_L$ contrariando a hipótese de x ser um número. Analogamente não podemos ter $x + y_R \leq x + y_L$. Mas também não podemos ter $x_R + y \leq x + y_L$ pois pelo parágrafo anterior $x < x_R$ e $y_L < y$ donde $x + y_L < x_R + y$. O caso $x_R + y \leq x + y_L$ é análogo.

Já estamos prontos para dar nomes a vários números. Chamamos $\{0, 1|\}$ de 2 porque é igual a $1 + 1$. Chamamos $\{0|1\}$ de $\frac{1}{2}$ porque $\{0|1\} + \{0|1\} = 1$, como o leitor assíduo poderá verificar. Temos ainda $\{0|\frac{1}{2}\} = \frac{1}{4}$ e $\{0|\frac{1}{4}\} = \frac{1}{8}$. O leitor certamente já percebe que temos todos os inteiros em **No** com a soma e a ordem usuais; se n é um natural podemos tomar $n = \{0, 1, \ldots, n-1|\}$, definição análoga à de Von-Neumann. Temos os ordinais dentro de **No**: basta tomar $\alpha = \{\beta|\}$ onde β varia por todos os ordinais menores do que α. Os ordinais aparecem na ordem usual mas o leitor que conhecer a adição de ordinais deve observar que esta não é a mesma adição que temos em **No**; afinal, a adição usual de ordinais nem é comutativa.

Simplicidade, Aniversários e Como Reconhecer Um Número

Vimos acima vários exemplos de números. Mas quanto valerá, por exemplo, da expressão abaixo?

$$\{1, 3|19, 122\}$$

Sabemos que a resposta deve estar entre 3 e 19, mas qual será seu valor exato? O leitor talvez fique surpreso ao descobrir que este número é 4.

A resposta geral a este tipo de pergunta é que o valor do número é o mais simples possível dentro do intervalo definido pelas opções. Temos que explicar o que significa ser mais simples, mas esta é a mesma noção que já estamos usando sempre que provamos algo por indução: uma opção de um número é mais simples que o próprio número. Vamos agora demonstrar as afirmações feitas acima.

Vamos primeiro mostrar um caso particular: se X é um número com todo $X_L < 0$ e todo $X_R > 0$ então $X = 0$. De fato, se Esquerda começa, deve jogar para um $X_L < 0$ e portanto perde; analogamente, se Direita começa, deve jogar para algum $X_R > 0$ e portanto perde. Seja agora X um número qualquer e seja Y com a propriedade de que para todo X_L, $X_L < Y$ e para todo X_R, $X_R > Y$ mas que isto não é verdade se substituirmos Y por um Y_L ou Y_R. Assim, para todo Y_L existe um X_L com $Y_L \leq X_L$ (e portanto $Y_L < X$) e para todo Y_R existe X_R com $Y_R \geq X_R$ (e portanto $Y_R > X$). Afirmamos que $X - Y = 0$.

De fato, as opções à esquerda de $X-Y$ são da forma X_L-Y ou $X-Y_R$. Temos $X_L-Y<0$ por hipótese e também temos $X-Y_R<0$ pelo que observamos acima. Assim, todas as opções à esquerda de $X-Y$ são negativas e todas as opções à direita de $X-Y$ são positivas. Pelo que vimos anteriormente, $X-Y=0$ e $X=Y$.

Consideremos com cuidado aquilo que acabamos de demonstrar. Provamos, conforme havíamos prometido, que X é o número mais simples maior do que todo X_L e menor do que todo X_R. Mas, de fato, provamos mais do que isso: provamos que dado qualquer intervalo definido por baixo por um conjunto de números X_L e por cima por um conjunto de números X_R existe exatamente um número neste intervalo que é mais simples que todos os demais. Assim, quando dizemos que X é *o* número mais simples satisfazendo determinadas condições não estamos sendo ambíguos.

Vamos agora pensar na idéia de simplicidade sob outro ponto de vista levemente diferente. Podemos medir a simplicidade de um número perguntando quando ele é criado. Assim, o número 0 é criado no dia 0 pois não precisamos de nenhum ingrediente anterior. Os números 1 e -1 são criados no dia 1, 2, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ e -2 são criados no dia 2. Em geral, definimos o aniversário de um número como sendo o menor ordinal estritamente maior do que todos os aniversários de todas as opções do número. Assim, se x é mais simples do que y, o aniversário de x é necessariamente menor do que o de y.

Antes de prosseguir vamos tentar motivar ou justificar a definição de soma sob nosso novo ponto de vista. Sabemos que x é maior do que alguns x_L e menor do que alguns x_R e que é o número mais simples satisfazendo estas condições; temos a informação análoga para y. Que podemos afirmar sobre $x+y$? As estimativas que pudermos deduzir sobre $x+y$ deveriam definir esta soma como o número mais simples em um certo intervalo. O leitor apressado diria que $x+y$ deve ser maior que todo x_L+y_L e menor que todo x_R+y_R. Talvez ele propusesse como definição que $x+y=\{x_L+y_L|x_R+y_R\}$; esta definição, entretanto, é péssima sob mais de um ponto de vista. A operação assim definida não está bem definida nem leva números em números, como o leitor poderá facilmente verificar. O que saiu errado? Acontece que a tentativa de definição acima leva em conta parte, mas não toda a informação disponível. Sabemos, de fato, que $x_L+y_L<x+y$ mas sabemos mais do que isso: sabemos que $x+y_L<x+y$ e que $x_L+y<x+y$. Para que a definição de soma funcione bem, devemos usar também esta informação. Na verdade, o surpreendente não é que a outra definição tenha dado errado: o surpreendente é que alguma definição dê certo!

Números como Seqüências de Sinais

Já temos os ingredientes necessários para introduzir nosso primeiro sistema de nomes ou interpretações para números. Vamos identificar cada número com uma função de um ordinal α (que será o aniversário do número) para o conjunto de dois elementos $\{\nearrow,\searrow\}$ (estes dois objetos não devem ser pensados como tendo nenhum significado a priori exceto que $\searrow<\nearrow$). A partir de agora chamaremos uma tal função de uma seqüência de sinais.

Diremos que uma seqüência a é mais simples que b se a for uma restrição de b a um ordinal menor, portanto parte do domínio de b. Diremos que a é menor que b se, sendo α o menor ordinal para o qual não temos $a(\alpha) = b(\alpha)$, tivermos uma das três seguintes situações: $a(\alpha) = \searrow$ e $b(\alpha) = \nearrow$ ou $a(\alpha) = \searrow$ mas α não está no domínio de b ou $b(\alpha) = \nearrow$ mas $alpha$ não está no domínio de a. Uma opção à esquerda de uma seqüência será uma seqüência menor e mais simples e uma opção à direita de uma seqüência será uma seqüência maior e mais simples. Vamos agora mostrar como isto define um número para cada seqüência e vice-versa.

Dada uma seqüência, e supondo já associado um número a cada seqüência mais simples, associamos à seqüência o número cujas opções à esquerda e à direita são os números associados às opções à esquerda e à direita da seqüência. Por indução, isto associa a cada seqüência um número. É fácil ver que esta maneira de associar a cada seqüência um número respeita ordem; faltaria apenas verificar que todo número está associado a alguma seqüência. Por indução isto é verdade pois dado um número podemos supor por indução que todas as suas opções correspondem a seqüências; existe uma seqüência que é a mais simples maior do que todas as opções à esquerda e menor do que todas as opções à direita. Esta seqüência corresponde a um número e pelo que vimos anteriormente este será o número considerado.

Escreveremos o número listando os termos da seqüência correspondente em ordem entre $\langle$ e $\rangle$. Assim, por exemplo, $0 = \langle\rangle$, $1 = \langle\nearrow\rangle$, $\frac{1}{2} = \langle\nearrow\searrow\rangle$, $\omega = \langle\nearrow\nearrow\nearrow\ldots\rangle$.

Produto, Inversão, Raiz

Chamar os jogos que vimos até agora de números poderia parecer um pouco inapropriado se tudo o que soubéssemos fazer com estes números fosse somar, subtrair e comparar. Vamos agora ver que existem muitas outras funções ou operações naturalmente definidas em **No**. A primeira e mais simples delas é a multiplicação: se $x = \{x_L|x_R\}$ e $y = \{y_L|y_R\}$ definimos

$$x\cdot y = \{x\cdot y_L+x_L\cdot y-x_L\cdot y_L, x\cdot y_R+x_R\cdot y-x_R\cdot y_R|x\cdot y_R+x_L\cdot y-x_L\cdot y_R, x\cdot y_L+x_R\cdot y-x_R\cdot y_L\}.$$

Talvez valha a pena explicar um pouco o funcionamento desta operação: para obter uma opção de $x \cdot y$ escolhemos uma opção de x, digamos x_L, e uma opção de y, digamos y_R. Como x_L é mais simples que x podemos supor que já sabemos calcular $x_L \cdot y$; analogamente podemos supor que já sabemos calcular $x \cdot y_R$ e $x_L \cdot y_R$. Como a soma já foi definida e podemos considerar que qualquer soma é mais simples que qualquer multiplicação, podemos supor que sabemos calcular $x \cdot y_R + x_L \cdot y - x_L \cdot y_R$. Este valor será uma opção à direita de $x \cdot y$. Considerando todas as possíveis opções em x e em y teremos todas as opções de $x \cdot y$.

Antes de prosseguir vamos tentar motivar ou justificar a definição de multiplicação de forma análoga a como justificamos a definição de adição. Sabemos que x é maior do que alguns x_L e menor do que alguns x_R e que é o número mais simples satisfazendo estas condições; temos a informação análoga para y. Que estimativas podemos fazer para $x \cdot y$? O leitor precipitado poderia dizer que $x_L \cdot y$ é menor que $x \cdot y$ e querer definir $x \cdot y = \{x \cdot y_L, x_L \cdot y | x \cdot y_R, x_R \cdot y\}$. Esta tentativa está errada sob mais de um ponto de vista: a desigualdade só vale se y for positivo e a operação acima nada mais é do que a soma redefinida! Temos assim a pergunta de quais são as estimativas corretas, gerais e mais fortes possíveis que podemos estabelecer para $x \cdot y$. A resposta não é óbvia, mas podemos verificar o seguinte: como $x - x_L$ e $y - y_L$ são positivos, devemos ter $(x - x_L) \cdot (y - y_L) > 0$ e $x \cdot y > x \cdot y_L + x_L \cdot y - x_L \cdot y_L$. Isto justifica parcialmente nossa definição: as opções à esquerda e direita de fato são estimativas corretas. Mas serão fortes o suficiente para que a definição funcione? Esta parte não é nada óbvia; novamente, o surpreendente é que alguma definição funcione!

Devemos agora mostrar todas as propriedades esperadas da multiplicação. Com esta multiplicação, **No** será um Corpo real fechado mas isto só será provado mais adiante. Podemos provar agora mesmo por indução e sem grande dificuldade, mas com algum trabalho, que a multiplicação é bem definida, leva números em números, é comutativa, associativa, distributiva com respeito à soma e respeita a ordem. (O leitor assíduo poderá verificar que a multiplicação *não* está bem definida para jogos em geral.) Estas demonstrações serão omitidas.

Seria possível demonstrar que dado qualquer número x, existe um número y com $x \cdot y = 1$. Sob vários pontos de vista entretanto é conveniente ter uma definição recursiva de $1/x$ análoga às definições soma e produto. Para isso vamos procurar estimativas para $1/x$ a partir de x_L e x_R; será bem mais simples considerar apenas $x > 0$ de tal forma que podemos escrever $x = \{0, x_L | x_R\}$, onde x_L e x_R também são escritos nesta forma. Algumas estimativas óbvias são $1/x < 1/x_L$ e $1/x > 1/x_R$. Estas estimativas não são suficientes nem são todas as que podemos obter. Se $x_{L,0}$ e $x_{L,1}$ são duas opções à esquerda de x temos $(x - x_{L,0}) \cdot (x - x_{L,1}) > 0$ donde $x_{L,0} \cdot x_{L,1} > x \cdot x_{L,0} + x_{L,1} \cdot x - x \cdot x$ e, dividindo por $x \cdot x_{L,0} \cdot x_{L,1}$, $1/x > 1/x_{L,1} + 1/x_{L,0} - x/x_{L,0} \cdot x_{L,1}$. Podemos fazer um processo como este com qualquer número (finito) de opções de quaisquer lados. Podemos agora definir $1/x$ da seguinte forma: as opções serão da forma

$$\frac{1 - \prod(1 - \frac{x}{x_i})}{x}$$

onde o x no denominador cancela formalmente, os x_i são opções e o lado para o qual vai uma opção é determinado pela paridade do número de x_i que são opções à esquerda. Outra definição equivalente é a seguinte: se $x = \{0, x_L | x_R\}$ definimos $y = 1/x$ por

$$y = \{0, \frac{1 + (x_R - x)y_L}{x_R}, \frac{1 + (x_L - x)y_R}{x_L} | \frac{1 + (x_L - x)y_L}{x_L}, \frac{1 + (x_R - x)y_R}{x_R}\}.$$

A presença de y_L e y_R na definição das opções requer explicação: usamos opções velhas de y para obter opções novas. Assim, a definição de $1/x$ é recursiva de uma forma inteiramente nova: mesmo *para um dado* x usamos recursividade para definir $1/x$. A demonstração de que estas duas definições são equivalentes, de que $1/x$ está bem definido, é um número e satisfaz $x \cdot (1/x) = 1$ é feita por indução e não é difícil mas será omitida.

Finalmente, aqui está uma definição recursiva de $\sqrt{x}$:

$$\sqrt{x} = y = \{\sqrt{x_L}, \frac{x + y_L y_R}{y_L + y_R} | \sqrt{x_R}, \frac{x + y_{L,0} y_{L,0}}{y_{L,0} + y_{L,1}}, \frac{x + y_{R,0} y_{R,0}}{y_{R,0} + y_{R,1}}\}.$$

Novamente usamos opções velhas para obter opções novas. A verificação de que esta definição funciona é fácil e é deixada a cargo do leitor.

Números Reais

Já estamos prontos para mostrar como os números reais aparecem entre os surreais. Primeiro, uma descrição de como funciona a simplicidade: os números mais simples são os racionais de denominador igual a uma potência de dois; dentre estes, aqueles com denominador menor são mais simples; dentre os inteiros, os de módulo menor são mais simples. Esta descrição é suficiente para construir qualquer real. Assim, por exemplo, $\pi = \{3, 3\frac{1}{8}, \ldots | \ldots, 3\frac{3}{16}, 3\frac{1}{4}, 3\frac{1}{2}, 4\}$, $3\frac{3}{16} = \{3\frac{1}{8} | 3\frac{1}{4}\}$, $4 = \{3|\}$. Também podemos escrever a seqüência de sinais para um número real a partir de sua expansão binária. Temos, por exemplo, a partir da expansão binária $\pi = 11.0010\ldots$ que $\pi = \langle \nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\searrow\searrow\searrow\nearrow\searrow\ldots \rangle$. O primeiro $\nearrow$ corresponde ao sinal, os três seguintes correspondem à parte inteira de π, o primeiro $\searrow$ informa que acabou a parte inteira e de certa forma equivale à vírgula, e os demais sinais equivalem aos algarismos que vêm depois da vírgula na expansão binária de π, 0 correspondendo a $\searrow$ e 1 a $\nearrow$.

Deveríamos agora verificar que esta correspondência entre reais e (alguns) surreais respeita a ordem e as operações de soma e produto. A preservação da ordem é evidente. A verificação de que esta correspondência respeita as operações seria feita por indução (quanto à simplicidade) e usaria o que aprendemos sobre como reconhecer um número; estas verificações, simples porém um pouco trabalhosas, são deixadas a cargo do leitor.

No parágrafo anterior adotamos o ponto de vista de que já tínhamos os reais e queríamos verificar que um certo conjunto de surreais se comporta como os reais. Outro ponto de vista seria supor que estamos usando os surreais para, entre outras coisas, construir os reais. Sob este ponto de vista deveríamos definir um conjunto $\mathbf{R}$ de surreais e mostrar que este conjunto é um corpo ordenado completo. Este conjunto será aquele das seqüências de sinais finitas e das de comprimento ω que não são constantes a partir de certo ponto. A verificação de que este conjunto é um corpo ordenado é análoga ao que vimos no parágrafo anterior: afinal, basta mostrar que o conjunto é fechado pelas operações de soma, subtração, produto e divisão. Para mostrar que este corpo é completo podemos construir o supremo de um conjunto de forma explícita.

Seja qual for nosso ponto de vista, passaremos a considerar **R** como um subcorpo de **No**. Veremos a seguir como funciona esta extensão.

A Forma Normal de Cantor-Conway

Vamos agora descrever uma maneira de dar nomes a números análoga à forma normal de Cantor para ordinais. Na forma normal de Cantor escrevemos

$$\alpha = \omega^{\beta_0} n_0 + \ldots + \omega^{\beta_i} n_i \ldots$$

onde $\beta_0 > \ldots > \beta_i > \ldots$ são ordinais e n_i são naturais e o índice i vai de 0 a n, n un natural. Gostaríamos de escrever uma forma análoga para um surreal que seria

$$x = \omega^{y_0} r_0 + \ldots + \omega^{y_i} r_i + \ldots$$

onde y_i são surreais e r_i são reais.

Nossa primeira necessidade é portanto definir ω^x. Pela forma normal deveríamos ter $\omega^{x_0} r_0 > \omega^{x_1} r_1$ desde que $x_0 > x_1$ e $r_0 > 0$ e r_1 sejam reais. Ou seja, dado $x = \{x_L | x_R\}$ devemos ter $\omega^x > 0$, $\omega^x > \omega^{x_L} r$ e $\omega^x < \omega^{x_R} r$ para qualquer real positivo r. Podemos assim definir

$$\omega^x = \{0, \omega^{x_L} r | \omega^{x_R} r\}.$$

Podemos verificar facilmente que $\omega^0 = 1$, $\omega^1 = \omega$, $\omega^{x+y} = \omega^x \cdot \omega^y$ e que esta função é estritamente crescente; isto justifica a notação exponencial.

Vamos ver agora como encontrar o maior termo da forma normal de x. Queremos assim determinar y_0 e r_0. Se y é tal que $\omega^y r < x$ para todo $r \in \mathbf{R}$, ou tal que $\omega^y r > x$ para todo $r \in \mathbf{R}$ então claramente y é pequeno demais para ser y_0. Por outro lado, se $\omega^y r > x$ para todo $r > 0$ e $\omega^y r < x$ para todo $r < 0$ então y é grande demais para ser y_0. Assim, para y_0 deve existir r_0 diferente de 0 com $\omega^{y_0} r < x$ se $r < r_0$ e $\omega^{y_0} r > x$ se $r > r_0$. A unicidade de y_0 e r_0 é evidente; falta provar sua existência. Vamos mostrar a existência construindo y_0 de forma indutiva. Podemos supor sem perda de generalidade que $x > 0$ e que $x = \{0, x_L | x_R\}$ onde x_L e x_R também são positivos e escritos desta forma. Podemos supor por indução que sabemos achar o maior termo da forma normal para cada x_L e x_R. Se o y_0 de alguma opção funciona para x, podemos dar a construção por encerrada. Caso contrário os y_0 dos x_L deverão ser pequenos demais e os y_0 dos x_R deverão ser grandes demais. Podemos assim chamar os y_0 para os x_L de y_L, os y_0 para os x_R de y_R e considerar $y = \{y_L | y_R\}$. Afirmamos que $x = \omega^y$. Isto é facilmente verificado por um argumento de simplicidade: as informações que temos dizem que as opções de x e de ω^y definem um mesmo intervalo.

Devemos agora generalizar o processo acima para definir os demais termos da forma normal. Uma idéia seria achar o maior termo de $x - \omega^{y_0} r_0$ e chamá-lo de $\omega^{y_1} r_1$ e continuar assim por indução. Por esse processo achamos facilmente y_i e r_i para i um número natural.

Mas aí encontramos uma dificuldade: a forma normal não precisa terminar em um número finito de passos e para encontrar y_ω e r_ω pelo processo acima temos de definir $\omega^{y_0}r_0 + \ldots + \omega^{y_i}r_i + \ldots, i < \omega$, uma soma infinita cujo significado ainda não foi definido. Mais geralmente para encontrar y_α e r_α temos de definir $\omega^{y_0}r_0 + \ldots + \omega^{y_i}r_i + \ldots, i < \alpha$.

Podemos resolver esta dificuldade definindo simultaneamente por indução os primeiros α termos de forma normal de um número x e o valor da forma normal $\omega^{y_0}r_0 + \ldots + \omega^{y_i}r_i + \ldots, i < \alpha$. Observe que com isto *não* estamos definindo somas infinitas em geral mas apenas o caso muito particular das formas normais. Definimos assim $\omega^{y_0}r_0 + \ldots + \omega^{y_i}r_i + \ldots, i < \alpha$ como sendo o número mais simples que têm os primeiros α termos da forma normal como acima. Tal número pode ser construído tomando como opções versões truncadas e modificadas da forma normal acima, portanto já definidas por indução. Dizemos que o α-ésimo termo da forma normal de x é $\omega^{y_\alpha}r_\alpha$ se para todo $r < r_\alpha$ temos $\omega^{y_0}r_0 + \ldots + \omega^{y_i}r_i + \ldots + \omega^{y_\alpha}r < x$ e analogamente para todo $r > r_\alpha$ valer a desigualdade oposta.

Falta ver como o processo acima descrito termina. Já observamos que não devemos esperar uma forma normal finita. Podemos ver entretanto que se x tem aniversário α o forma normal de x terá no máximo α termos. De fato, já vimos que truncando a forma normal de um número sempre obtemos outro número mais simples. Se a forma normal para x não parasse até o termo de ordem α teríamos uma seqüência de $\alpha + 1$ números ordenados por simplicidade, todos eles mais simples do que x. Tomando os aniversários, teríamos uma seqüência crescente de ordinais menores do que α com mais de α termos, o que é um absurdo.

Já definimos portanto a forma normal; todo número tem uma forma normal e cada forma normal corresponde a um número. Assim, alguns exemplos de números são ω^π, $\omega + \omega^{\frac{1}{2}} + \omega^{\frac{1}{4}} + \ldots$, $\omega^{\omega^{-1}}$, $\omega^{\omega^{\omega^{\omega+\pi}}}$, $1 + \omega^{-1} + \omega^{-2} + \ldots + \omega^{-\omega} + \ldots + \omega^{-2\omega} + \ldots + \omega^{-3\omega} + \ldots\ldots$.

Há uma complicação entretanto para a qual devemos chamar a atenção do leitor. Quando escrevemos a forma normal de um número, os expoentes são números. Podemos escrever novamente os expoentes na forma normal e prosseguir com este processo. É fácil mostrar que o aniversário dos expoentes é sempre menor ou igual ao aniversário do número original e que será estritamente menor exceto talvez na situação $x = x' + \omega^y$ ou $x = x' - \omega^y$. Nesta situação, entretanto, nada garante que y seja mais simples do que x. Podemos assim cair na situação em que o processo de escrever formas normais não pararia. Podemos, por exemplo, ter $x = \omega^x$; o leitor que conheça ordinais lembrará que isto ocorre para muitos ordinais, que são denotados por ϵ_α. Na situação de números surreais, também denotaremos tais números por ϵ_y, onde y é um número.

Séries

Séries são das ferramentas de uso mais comum na análise. Consideraremos mais adiante as possibilidades e as dificuldades de criar uma análise surreal. Vamos agora definir a soma de uma série de surreais.

Considere uma expressão da forma $\sum_n a_n$ onde o índice assume valores naturais e os a_n são números surreais. Vamos escrever cada a_n na sua forma normal como $a_n = \sum_x \omega^x r_{x,n}$. Podemos definir o valor de $\sum_n r_{x,n}$ usando a definição usual de soma de uma série de números reais; chamemos este valor, se a série convergir, de s_x. Podemos definir o valor de $\sum_n a_n$ como sendo $\sum_x \omega^x s_x$ se cada s_x estiver bem definido e a expressão acima for uma forma normal, isto é, o conjunto dos x que de fato aparecem na expressão for bem ordenado quando lido de cima para baixo. Esta definição é ampla demais, entretanto, pois com ela temos $(\omega - 1) + (\omega^2 - \omega) + (\omega^3 - \omega^2) + \cdots = -1$, ou seja, uma soma de termos positivos dá uma resposta negativa. Para evitar este tipo de comportamento, exigimos que o conjunto dos x para os quais *algum* $r_{x,n}$ é diferente de zero seja bem ordenado quando lido de cima para baixo.

Mesmo com esta restrição, esta definição de soma de uma série tem muitas propriedades indesejáveis. Antes de mais nada, esta definição tem muito pouco a ver com a idéia clássica de limite: a série $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$ converge para 2 mas $2 - \frac{1}{\omega}$ é maior que qualquer soma parcial e menor do que 2. Considere ainda as duas seguintes séries: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$ e $(\frac{3}{2} - \frac{1}{\omega}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{\omega 2}) + (\frac{1}{8} - \frac{1}{\omega 4}) + \cdots$. A primeira converge para 2 e a segunda para $2 - \frac{2}{\omega}$. Isto significa que as somas parciais da primeira são sempre estritamente menores que as da segunda mas o valor da primeira série é estritamente maior que o valor da segunda. Considere finalmente a seguinte série: $(1 - \frac{1}{\omega^2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{\omega^2}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{\omega^2}) + \cdots$. Esta série diverge apesar de ser facilmente sanduichada entre duas séries convergentes com a mesma soma.

Depois destas observações o leitor talvez esteja convencido de que esta definição de soma de uma série é imprestável. Este não é o caso. Se considerarmos uma série de potências da forma $\sum_n a_n X^n$ podemos nos perguntar para que valores de X a série converge. É um teorema de demonstração não muito difícil que se os a_n são reais então a série converge (absolutamente) para qualquer X infinitesimal e que quaisquer que sejam os a_n a série converge (absolutamente) para qualquer X suficientemente pequeno.

Isto nos permite usar a série de Taylor para definir as funções clássicas em grandes regiões. Podemos definir $\exp x$, $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ para qualquer x finito, isto é, menor em módulo que algum real. Podemos mostrar que estas funções vão satisfazer as propriedades esperadas. Mais adiante consideraremos o problema de estender estas definições para domínios maiores.

No é real-fechado, No[i] é algebricamente fechado

Um corpo ordenado é dito real-fechado quando todo elemento positivo tem uma raiz quadrada e todo polinômio de grau ímpar tem uma raiz. O exemplo mais evidente de um tal corpo é $\mathbf{R}$. É um teorema essencialmente devido a Gauss que se k é um corpo real-fechado então $k[i]$ é algebricamente fechado onde $i^2 = -1$. Vamos esboçar uma demonstração de que **No** é real fechado.

Já vimos que todo elemento positivo de **No** admite uma raiz quadrada. Falta apenas portanto verificar que todo polinômio de grau ímpar tem raiz. Seja n ímpar e considere o polinômio $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$. Devemos provar que este polinômio tem uma raiz. Podemos supor sem perda de generalidade que $a_{n-1} = 0$ e que $\max |a_i| = 1$. Isto é equivalente a dizer que a forma normal de cada a_i começa com um termo com expoente de ω menor ou igual a zero. Se r_i é a parte real de a_i, o polinômio $X^n + r_{n-2}X^{n-2} + \ldots + r_1 X + r_0$ pode ser fatorado de forma única como um produto de polinômios reais $f_j(X)$ onde cada f_j é potência de um polinômio irredutível em $\mathbf{R}$ e f_j e $f_{j'}$ não têm fatores comuns. Esta fatoração pode ser estendida analiticamente a uma vizinhança do polinômio $X^n + r_{n-2}X^{n-2} + \ldots + r_1 X + r_0$ o que implica pela série de Taylor que existe uma fatoração correspondente para $X^n + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_0$. Como algum f_j deve ter grau ímpar basta por indução considerar o caso de termos um único f_j; mas como a soma das raizes é zero, isto só pode acontecer para um polinômio de grau 1. Isto conclui a demonstração.

Oz: Inteiros em No

Vamos agora definir uma classe de números dentro de **No** que será a classe dos inteiros; vamos pensar qual seria a definição razoável mais ampla possível. Certamente que se x é um inteiro, não deve haver outro inteiro entre $x - 1$ e $x + 1$; em certo sentido, esperamos que os inteiros sejam mais simples que os não inteiros. A partir destas duas observações concluimos que devemos ter $x = \{x - 1 | x + 1\}$ para qualquer inteiro; **Oz** será a classe dos números satisfazendo esta propriedade. Usaremos a palavra 'inteiro' para designar um elemento de **Oz** ou **Z**, dependendo do contexto para decidir se estamos falando de um ou outro caso.

É fácil ver que um número está em **Oz** se e somente se sua forma normal não tiver expoentes negativos e se sua parte real (correspondente ao expoente 0) for inteira. Isso mostra que **Oz** é fechado pela soma e produto. Também é fácil verificar que um número está em **Oz** se e somente se na sua expansão como seqüência de sinais não aparecerem sinais diferentes em posições consecutivas. Uma observação trivial mas significativa é que todo surreal r pode ser escrito como $r = n\omega^x$ onde n é um inteiro Apesar de ser fácil caracterizar e descrever **Oz**, podemos fazer várias perguntas difíceis sobre a álgebra e aritmética de **Oz**. Aqui muita coisa está em aberto assim deixaremos várias perguntas sem resposta.

Congruências funcionam em **Oz** da mesma forma como elas funcionam em **Z**. Também é fácil mostrar que a divisão com resto funciona como em **Z**, ou seja, dados a e b, $b > 0$, existem únicos c e d com $a = bc + d$ e $0 \leq d < b$. Poderíamos pensar em calcular máximos divisores comuns com o algoritmo de Euclides mas isso não precisa terminar: tome por exemplo $\sqrt{2}\omega$ e ω. De fato, estes números não têm um máximo divisor comum.

Um dos teoremas mais importantes sobre $\mathbf{Z}$ é o da fatoração única de um inteiro como um produto de primos. É fácil ver que um teorema análogo não pode valer para **Oz** por uma razão muito forte: existem seqüências infinitas de inteiros $a_0, a_1, \ldots$ onde a_i é um divisor de a_j se $i > j$. Assim, por exemplo, ω pode ser infinitamente fatorado: $\omega = (\omega^{\frac{1}{2}})(\omega^{\frac{1}{2}}) = (\omega^{\frac{1}{\omega}})(\omega^{1-\frac{1}{\omega}}) = 2 \cdot 17 \cdot (\frac{1}{34}\omega)$ são apenas alguns exemplos de fatorações de ω. Na verdade, muitos outros inteiros também podem ser assim infinitamente fatorados: $\omega - 1 = (\omega^{\frac{1}{2}} - 1)(\omega^{\frac{1}{2}} + 1)$ e $\omega + 1 = (\omega^{\frac{1}{3}} - 1)(\omega^{\frac{2}{3}} + \omega^{\frac{1}{3}} + 1)$ são alguns exemplos. Uma questão em aberto é saber se existe algum número infinito que não seja infinitamente fatorável, ou, o que é equivalente, saber se existe algum primo infinito. A resposta é provavelmente sim e um forte candidato é $\omega + \omega^{\frac{1}{2}} + \omega^{\frac{1}{3}} + \cdots + 1$. Outro fato provavelmente verdadeiro sobre **Oz** é o seguinte: se o inteiro n pode ser fatorado como $n = pq$ e $n = rs$ então existem inteiros a, b, c e d com $n = abcd$, $p = ab$, $q = cd$, $r = ac$ e $s = bd$.

Um teorema de Lagrange diz que todo inteiro positivo (em $\mathbf{Z}$) pode ser escrito como uma soma de quatro quadrados. O resultado análogo é falso em **Oz**. A parte finita de uma soma de quadrados será a soma dos quadrados das partes finitas. Assim, $\omega - 1$ não pode ser escrito como soma de quadrados pois isto significaria que também -1 é uma soma de quadrados. O leitor pode pensar no que aconteceria com cubos no lugar de quadrados.

Uma Tentativa de Análise em No

Até agora nosso estudo de **No** nada teve a ver com as técnicas usuais de estudar $\mathbf{R}$, ou seja, não fizemos nada que pudesse ser chamado de análise em **No**.

O leitor pode pensar que a generalização das idéias de limite, continuidade e derivada seja simplesmente uma questão de traduzir as definições usuais, bastando quantificar sobre surreais ao invés de reais e talvez sobre ordinais ao invés de naturais. Há entretanto um problema sério: **No** não é completo em nenhum sentido usado na análise habitual. Assim, por exemplo, a seguinte função é localmente constante sem ser constante:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \text{ é menor do que algum real;} \\ 1, & \text{se } x \text{ é maior do que qualquer real.} \end{cases}$$

Este exemplo mostra que uma tentativa de análise em **No** deve ser mais do que uma simples transcrição de definições. Para o caso de algum leitor estar pretendendo completar **No**, há problemas pelo menos tão sérios com esta idéia do que com a anterior. O menor dos problemas é que o completamento de **No** é um objeto ilegal na maioria das versões da teoria dos conjuntos. Afinal, **No** já é grande demais para ser um conjunto; seu completamento é grande demais para ser uma classe. Um problema mais sério é que mesmo que modificássemos nossa teoria dos conjuntos para permitir objetos maiores nada conseguiríamos com isso: não podemos ter um corpo ordenado maior do que $\mathbf{R}$ completo em nenhum sentido clássico da palavra. O completamento de **No** não seria um corpo e se aumentássemos o completamento para ser um corpo ele deixaria de ser completo.

Aliás, este processo de acrescentar números nada mais seria do que continuar o processo de construção de **No** por um pouco mais de tempo.

Uma idéia radicalmente diferente seria a de tentar obter definições recursivas, como as de soma e produto, para conceitos de análise. Vamos agora descrever uma tentativa de definir a integral por um tal processo. Antes de mais nada, devemos frisar que esta tentativa tem um sucesso muito relativo.

Seja f uma função e suponha que queremos calcular $\int_a^b f(t)dt$. Como queremos definir esta integral a partir de expressões mais simples devemos ser capazes de dar estimativas para a função f. E aqui vem uma observação extremamente importante. Uma função para nós não será simplesmente uma maneira de associar um número a um número: uma função deve vir com uma definição recursiva que dá as opções do valor de $f(x)$. Estamos portanto em certa medida distinguindo a função $f(x) = \{|\}$ da função $g(x) = \{\{|0,x\}|\{0,x|\}\}$ apesar das duas sempre valerem zero: f é a "verdadeira" função constante igual a zero e g é uma construção estranha que dá sempre o valor zero. Veremos que nossa definição de integral funcionará para f mas não precisa funcionar para funções "estranhas " como g. Vamos portanto escrever $f(x) = \{f_L(x)|f_R(x)\}$ e usar estas opções como sendo funções mais simples.

Voltemos agora a considerar a integral $\int_a^b f(t)dt$. Se b_L é uma opção à esquerda de b, podemos supor definida $\int_a^{b_L} f(t)dt$. Podemos ainda supor que sabemos integrar as várias f_L em qualquer domínio. Podemos portanto calcular $\int_a^{b_L} f(t)dt + \int_{b_L}^b f_L(t)dt$; este valor deve ser menor do que $\int_a^b f(t)dt$ e pode portanto ser utilizado como uma opção à esquerda. Podemos obter mais opções à esquerda, entretanto, tomando $b_0 = b_L < b_1 < \ldots < b_{n-1} < b_n = b$ e calculando $\int_a^{b_L} f(t)dt + \int_{b_0}^{b_1} f_L(t)dt + \ldots + \int_{b_{n-1}}^{b_n} f_L(t)dt$; observe que os f_L nos vários pedacinhos não precisam ser iguais. Para facilitar a notação, vamos escrever a expressão acima como $\int_a^{b_L} f(t)dt + \not\!\!\int_{b_L}^b f_L(t)dt$ onde o símbolo $\not\!\!\int$ denota a soma de integrais em subintervalos como no exemplo acima.

Já obtivemos assim a opção à esquerda $\int_a^{b_L} f(t)dt + \not\!\!\int_{b_L}^b f_L(t)dt$. Outra opção à esquerda seria $\int_{a_R}^b f(t)dt + \not\!\!\int_a^{a_R} f_L(t)dt$. Outras opções igualmente óbvias mas talvez inesperadas são $\int_a^{b_R} f(t)dt - \not\!\!\int_b^{b_R} f_R(t)dt$ e $\int_{a_L}^b f(t)dt - \not\!\!\int_{a_L}^a f_R(t)dt$. Estas opções talvez sejam inesperadas pelo uso de valores da função fora do intervalo de integração $[a,b]$. Sem estas opções entretanto a definição não funciona; talvez sirva como uma forma de justificativa o fato de nossas funções deverem ser definidas globalmente de qualquer forma. As opções à direita seriam: $\int_a^{b_L} f(t)dt + \not\!\!\int_{b_L}^b f_R(t)dt$, $\int_{a_R}^b f(t)dt + \not\!\!\int_a^{a_R} f_R(t)dt$, $\int_a^{b_R} f(t)dt - \not\!\!\int_b^{b_R} f_L(t)dt$ e $\int_{a_L}^b f(t)dt - \not\!\!\int_{a_L}^a f_L(t)dt$.

Como dissemos antes, esta definição de integral não é boa em todos os casos: algumas propriedades muito básicas da integral podem falhar. Esta definição funciona bem, entretanto, em alguns casos. Podemos usá-la, juntamente com a definição que já vimos de $1/x$ para definir $\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$. Esta definição funciona bem, satisfaz $\log(1) = 0$, $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ e coincide com os valores anteriormente encontrados nos casos em que sabíamos calcular o logaritmo por outros métodos.

O método que usamos para definir a integral pode em certa medida ser imitado para encontrar a solução de uma equação diferencial. Assim como para a integral, este método só funciona em alguns casos especiais. Com ele podemos definir a exponencial (ou seja, dar uma definição por opções e não apenas dizer que é o inverso do logaritmo) e as funções trigonométricas. Não vamos expor este processo aqui. Vejamos alguns exemplos do comportamento destas funções: $\cos(2\pi n) = 1$ se e somente se $n \in \mathbf{Oz}$, $\cos(\omega) = 1$, $\operatorname{sen}(\omega) = 0$, $\exp(\omega) = \omega^{\omega}$ e $\log(\omega) = \omega^{\frac{1}{\omega}}$.

Podemos definir x^y a partir de exp e log mas é importante observar que esta definição não é uma generalização de ω^x: a função ω^x tem sua inspiração nos ordinais e nada tem a ver com a exponencial da análise. Assim, por exemplo, $\omega^{\frac{1}{\omega}}$ no sentido de exponenciação ordinal é um número infinito mas $\exp(\log(\omega)/\omega)$ é um número apenas infinitesimalmente maior do que 1: sua forma normal começa com $1 + \omega^{(-1+\frac{1}{\omega})} + \cdots$.

Capítulo 2
Números

Nim

Começaremos este capítulo estudando o jogo Nim, já descrito. Estamos seguindo a convenção de que um jogador perde quando não pode jogar. Uma posição no jogo de Nim consiste em várias fileiras, cada uma com um certo número de palitos. A maneira como o jogo funciona corresponde precisamente à soma de jogos; isto é, se as fileiras têm valores x_i então a posição terá valor $\sum x_i$.

Vamos denotar o valor de uma fileira com n palitos por $*n$. Temos $*0 = 0$, $*1 = * = \{0|0\}$ e $*n = \{*0, *1, \ldots, *(n-1) | *0, *1, \ldots, *(n-1)\}$. Falta-nos assim saber o valor de $*n + *m$.

Dados dois naturais n e m vamos definir $n +_2 m$ da seguinte forma: escrevendo $n = \sum_{i \in A} 2^i$ e $m = \sum_{i \in B} 2^i$, seja $C = (A - B) \cup (B - A)$ e $n +_2 m = \sum_{i \in C} 2^i$. A operação $n +_2 m$ também pode ser descrita como uma soma efetuada na base 2 segundo o algoritmo usual *sem fazer "vai um"*. Temos assim na Tabela 1 uma tabuada para $+_2$:

$+_2$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
2	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
3	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
4	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
5	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
6	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9
7	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8
8	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6
10	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5
11	11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4
12	12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3
13	13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2
14	14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
15	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Tabela 1

Afirmamos que $*n + *m = *(n +_2 m)$. (Lembre que estamos identificando jogos equivalentes.) Vejamos agora como este resultado nos ensina a ganhar no jogo nim.

Dada uma posição qualquer de nim, "somamos" o número de palitos em cada fileira com a operação $+_2$. Se a resposta for 0, o próximo a jogar está perdendo e será forçado a mudar esta resposta para um valor diferente de zero. Este último fato é de verificação imediata. Se a resposta for diferente de 0, o próximo a jogar está ganhando, devendo mover para uma posição onde este resultado é 0. Afirmamos que isto é possível: isto é o cerne da demonstração e é o que veremos a seguir dando inclusive um algoritmo para determinar em que fileira jogar e como.

Verifique qual é o maior algarismo 1 da resposta (sempre na base 2) e procure uma fileira tal que o algarismo correspondente seja 1, o que deve existir para que na "soma" este algarismo seja 1. Vamos jogar nesta fileira: para ver quantos palitos devemos deixar, "some" (com $+_2$) o número de palitos em cada uma das outras. É evidente que esta jogada faria o novo resultado da "soma" ser igual a zero. Basta assim verificar que esta jogada é possível, ou seja, que o número de palitos que devemos deixar é menor que o número inicial; de fato, os algarismos mais altos (acima daquele que era 1 na resposta) permanecem inalterados mas o algarismo que era 1 na resposta e no número de palitos na fileira foi modificado para 0, fazendo o número diminuir. Tudo isto não apenas nos ensina como ganhar no nim mas demonstra a afirmação que fizemos acima.

Jogos Imparciais: Teoria

Diremos que um jogo é imparcial se todas as suas opções forem imparciais e o conjunto de opções à esquerda for igual ao conjunto de opções à direita. Trivialmente, se X é imparcial, $X = -X$ e $X + X = 0$. Ao invés de escrevermos $X = \{Y, Z, \ldots | Y, Z, \ldots\}$ escreveremos simplesmente $X = \{Y, Z, \ldots\}$. Exemplos óbvios de jogos imparciais são $*n$, para os vários valores de n. Observe que as opções de $*n$ são os jogos $*m$ para $m < n$. Mas isto é uma definição recursiva que funciona bem não só para os naturais mas para os ordinais: definimos $*\alpha$ como sendo o jogo (imparcial) que têm opções à esquerda e à direita $*\beta$ para $\beta < \alpha$. Veremos que todo jogo imparcial é igual a algum $*\alpha$ para algum α, que os $*\alpha$ são de fato distintos e como somar tais jogos.

Não temos $*\alpha = *\beta$ se $\alpha > \beta$ pois isto implicaria que $*\alpha + *\beta = 0$ tem opção $*\beta + *\beta = 0$, um absurdo. Suponha $x = \{*\alpha_0, *\alpha_1, \ldots\}$ e seja α o menor ordinal que não aparece entre os α_i. Afirmamos que $x = *\alpha$. Para isso devemos mostrar que em $x + *\alpha$ quem começa perde. Suponha que quem começa joga em $*\alpha$ para alguma posição $x + *\beta$, $\beta < \alpha$; por hipótese $*\beta$ deve ser uma opção de x e portanto o próximo jogador pode ganhar jogando para $*\beta + *\beta = 0$. Suponha que quem começa joga em x para $*\beta$, $\beta < \alpha$; o próximo jogador responde jogando em $*\alpha$ fazendo com que a posição se torne $*\beta + *\beta = 0$. Suponha finalmente que quem começa joga em x para $*\gamma$, $\gamma > \alpha$; o próximo jogador faz seu movimento de $*\gamma + *\alpha$ para $*\alpha + *\alpha = 0$. Isto demonstra que quem começa perde e que $x = *\alpha$; por indução, isso mostra que todo jogo imparcial é igual a algum $*\alpha$.

Finalmente, vejamos como calcular $*\alpha + *\beta$. No caso de α e β serem naturais, já vimos que $*\alpha + *\beta = *(\alpha +_2 \beta)$. Esta equação também valerá, com a mesma demonstração, para ordinais quaisquer bastando escrever cada ordinal em binário. Escrever um ordinal em binário significa, naturalmente, escrevê-lo como uma soma (finita) de potências distintas de 2 (potências no sentido de exponenciação ordinal). Se $\alpha = \sum_\gamma \omega^\gamma n_\gamma$ e $\beta = \sum_g amma\omega^\gamma m_\gamma$ então $\alpha +_2 \beta = \sum_\gamma \omega^\gamma n_\gamma +_2 m_\gamma$.

O que vimos acima de certa forma esgota a teoria de jogos imparciais. Mas quando estudamos exemplos vemos que nem sempre é fácil achar o valor de uma posição de forma sistemática. No próximo capítulo, vamos estudar alguns destes exemplos, ou seja, vamos descrever um jogo imparcial e tentar determinar seu valor.

Apesar de tudo o que vimos, a versão mais popular do jogo nim é aquela em que, ao contrário de nossa convenção, quem tira o último palito perde. Também no próximo capítulo vamos indicar a teoria completa desta versão do jogo nim e estudar o que acontece em geral com jogos imparciais quando adotamos esta convenção.

Nímeros

O que vamos descrever a seguir poderia ser considerado um exemplo de um jogo imparcial. Considere um jogo de nim usual onde além das fileiras de palitos temos cartões de dimensões inteiras. Ao tirar um cartão de lados a e b o jogador escolhe $a' < a$ e $b' < b$ e substitui o cartão de lados a e b por três cartões: um de lados a e b', outro de lados a' e b e um terceiro de lados a' e b'.

O leitor atento perceberá a semelhança entre este jogo e a multiplicação de números. Se denotarmos o valor de um cartão de lados a e b no jogo acima por $*(a \cdot_2 b) = *a \cdot *b$ temos $x \cdot y = \{x \cdot y' + x' \cdot y - x' \cdot y'\}$, o que corresponde exatamente à definição de multiplicação para números. Em outras palavras, $a \cdot_2 b$ é o menor natural que não é da forma $a \cdot_2 b' +_2 a' \cdot_2 b +_2 a' \cdot_2 b'$ com $a' < a$ e $b' < b$. Temos a Tabela 2 de $\cdot_2$.

Mencionamos no capítulo anterior que a multiplicação não está bem definida para jogos em geral. Mostraremos logo a seguir que a multiplicação está bem definida para jogos imparciais. A semelhança com os números, mais a ligação com o jogo nim, nos leva a chamar os jogos imparciais de nímeros. No fundo, nímeros são apenas números ordinais equipados com outras operações de soma e produto ($+_2$ e $\cdot_2$). Vamos denotar a classe dos nímeros por $\mathbf{No}_2$; estudaremos a seguir suas propriedades algébricas.

O Corpo $\mathbf{No}_2$

Vamos dar um esboço de como faríamos para demonstrar as propriedades desejadas da multiplicação de nímeros. Como o leitor provavelmente já imagina, todas as demonstrações

$\cdot_2$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	0	2	3	1	8	10	11	9	12	14	15	13	4	6	7	5
3	0	3	1	2	12	15	13	14	4	7	5	6	8	11	9	10
4	0	4	8	12	6	2	14	10	11	15	3	7	13	9	5	1
5	0	5	10	15	2	7	8	13	3	6	9	12	1	4	11	14
6	0	6	11	13	14	8	5	3	7	1	12	10	9	15	2	4
7	0	7	9	14	10	13	3	4	15	8	6	1	5	2	12	11
8	0	8	12	4	11	3	7	15	13	5	1	9	6	14	10	2
9	0	9	14	7	15	6	1	8	5	12	11	2	10	3	4	13
10	0	10	15	5	3	9	12	6	1	11	14	4	2	8	13	7
11	0	11	13	6	7	12	10	1	9	2	4	15	14	5	3	8
12	0	12	4	8	13	1	9	5	6	10	2	14	11	7	15	3
13	0	13	6	11	9	4	15	2	14	3	8	5	7	10	1	12
14	0	14	7	9	5	11	2	12	10	4	13	3	15	1	8	6
15	0	15	5	10	1	14	4	11	2	13	7	8	3	12	6	9

Tabela 2

são por indução. Nesta seção todas as variáveis denotarão nímeros, salvo menção explícita em contrário.

Os seguintes fatos são triviais: $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$, $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$, $x \cdot y = y \cdot x$, $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$. O fato do produto de dois nímeros ser um nímero também é imediato por indução. Para ver que o produto de nímeros está bem definido observe que, se $x \neq x'$ e $y \neq y'$ são nímeros escritos na "forma padrão" então $xy + xy' + x'y + x'y' \neq 0$, bastando verificar a definição de $x_M y_M$ onde x_M é o "máximo" de x e x', isto é, aquele com maior aniversário, e analogamente para y_M. Isto mostra que a resposta obtida para xy com a "forma padrão" de x e de y é a mesma resposta que obtemos com outra forma para x ou y: de fato, pelo que vimos sobre simplicidade, todas as opções de xy padrão aparecem nas outras formas de xy mas dentre as opções que aparecem em outras formas nunca está o próprio xy padrão. A distributividade também é demonstrada por indução sem maiores dificuldades

Para demonstrar que $\mathbf{No}_2$ é um Corpo de característica 2 falta apenas mostrar que todo elemento não nulo tem um inverso multiplicativo; em outras palavras, falta definir $1/x$. O leitor deve lembrar que tínhamos uma definição recursiva muito satisfatória de $1/x$ para números. Esta mesma definição funciona para nímeros, e a demonstração deste fato é fácil (por indução) e é deixada a cargo do incansável leitor.

Vamos agora descrever a estrutura algébrica de $\mathbf{No}_2$ omitindo algumas demonstrações (fáceis, por indução). Tanto a definição de soma quanto a de produto quanto a de inverso multiplicativo dizem que a resposta de qualquer uma destas operações é sempre a mais simples possível que não esteja errada por uma razão simples; as definições dizem justamente o que é uma razão simples.

Já vimos como funciona a soma. Um segmento inicial de nímeros de tamanho α é fechado pela soma se e somente se α é uma potência de 2. Neste caso temos $*\alpha + *\beta = *(\alpha+\beta)$ (aqui estamos falando da soma usual de números) para todo $\beta < \alpha$ e $*\alpha + *\alpha = 0$.

Não será possível dar uma descrição tão simples da multiplicação. Dado o que vimos no parágrafo anterior e a distributividade temos apenas de nos preocupar com produtos $*\alpha \cdot *\beta$ onde α e β são potências de 2.

Seja portanto α uma potência de 2. Se o conjunto dos nímeros de aniversário menor do que α não for fechado pela multiplicação, isto é, não for um anel, $*\alpha$ será o valor do produto mais simples que não está neste conjunto. Se o conjunto dos nímeros de aniversário menor do que α for fechado pela multiplicação mas não for fechado por inversos multiplicativos, isto é, for um anel mas não um corpo, então $*\alpha$ será o inverso do elemento mais simples diferente de 0 que não tem inverso neste conjunto. Se este conjunto for fechado pela multiplicação e inversão mas existirem polinômios não constantes com coeficientes neste conjunto mas sem raízes neste conjunto, isto é, se este conjunto for um corpo não algebricamente fechado então $*\alpha$ é uma raiz do polinômio mais simples sem raiz neste conjunto. Esta última frase merece uma explicação: diremos que um polinômio é mais simples que outro se tiver grau menor ou, tendo mesmo grau, tiver os coeficientes mais simples, onde os coeficientes de grau mais alto são aqueles que pesam mais. Finalmente, se o conjunto dos nímeros de aniversário menor do que α for um corpo algebricamente fechado, isto é, for fechado pela multiplicação, inversão e todo polinômio tiver raiz, então $*\alpha$ só poderá ser um elemento transcendente sobre este corpo.

Vamos estudar os primeiros nímeros. (Omitiremos os $*$ para facilitar a notação.) É claro que o conjunto dos 2 primeiros nímeros é o corpo $\mathbf{F}_2$. Quem será o nímero 2? Pelo que vimos acima, será raiz do polinômio mais simples possível que não tem raiz em $\mathbf{F}_2$. É fácil verificar que este polinômio é $X^2 + X + 1$; de fato, 2 é uma raiz deste polinômio pois $2^2 = 3$. Assim, o conjunto dos quatro primeiros nímeros é $\mathbf{F}_4$. O nímero 4 será uma raiz de $X^2 + X + 2$ e o conjunto dos 16 primeiros nímeros será $\mathbf{F}_{16}$. Em geral, o conjunto dos 2^{2^n} primeiros nímeros é o corpo finito de mesma ordem e o nímero 2^{2^n} é raiz de $X^2 + X + 2^{(2^n-1)}$. Mais geralmente, o produto de um nímero da forma 2^{2^n} por um nímero mais simples coincide com o produto correspondente de números e o quadrado de 2^{2^n} no sentido de multiplicação de nímeros é $\frac{3}{2}2^{2^n}$. Vemos assim que o conjunto dos ω primeiros nímeros é a reunião dos corpos da forma $\mathbf{F}_{2^{2^n}}$; este é o menor corpo quadraticamente fechado (i.e., onde todo polinômio de grau 2 tem raiz) contendo $\mathbf{F}_2$. Chamemos este corpo de $\mathbf{F}_{2^{2^\infty}}$.

Podemos naturalmente prosseguir com os nímeros infinitos. O nímero ω será raiz do polinômio mais simples que não tem raiz entre os nímeros “finitos”; é fácil verificar que este polinômio é $X^3 + 2$, ou seja, $\omega^3 = 2$, exponenciação de nímeros. O conjunto dos nímeros anteriores a ω^3 (agora exponenciação ordinal) é um corpo que podemos chamar de $\mathbf{F}_{2^{2^\infty 3}}$; ω^3 é raiz de $X^3 + \omega$, ou seja, $\omega^{3^3} = \omega$, onde a exponenciação dentro do parentesis é a exponenciação ordinal e a outra é exponenciação de nímeros. Prosseguindo assim, o conjunto dos ω^ω primeiros nímeros é um corpo naturalmente chamado de $\mathbf{F}_{2^{2^\infty 3^\infty}}$. Analogamente, o conjunto dos ω^{ω^2} primeiros nímeros será o corpo $\mathbf{F}_{2^{2^\infty 3^\infty 5^\infty}}$ e assim por diante resolvendo um primo de cada vez. Assim, o conjunto dos ω^{ω^ω} primeiros nímeros é um corpo algebricamente fechado e ω^{ω^ω} é um transcendente.

Uma dificuldade que ignoramos a partir de um certo ponto foi a de determinar o polinômio mais simples sem raiz. Isto pode ser feito sem grande dificuldade até ω^{ω^ω}. Todo o processo torna-se muito mais difícil a partir deste ponto; não sabemos sequer o valor do próximo transcendente.

Uma observação importante para a qual até agora não chamamos a atenção é a de que a função $f(x) = x^2$ é um automorfismo do Corpo dos nímeros pelo simples fato deste Corpo ser de característica 2.

Teoria dos Nímeros ou Aritmética em $\mathbf{No}_2$

Vamos agora olhar mais de perto para a aritmética dos nímeros, especialmente dos nímeros finitos. Em outras palavras, examinaremos a relação entre as operações clássicas e as operações de nímeros. Não seremos sistemáticos mas atacaremos várias perguntas em várias direções. Nesta seção deixaremos muitas perguntas em aberto; muitas delas estão realmente em aberto e podem não ter uma resposta simples.

Um tópico natural para perguntas é a multiplicação de nímeros, ou seja, a operação $\cdot_2$. Como $\cdot_2$ é distributiva com relação a $+_2$ para entender $\cdot_2$ basta em certo sentido entender como ela funciona para potências de 2. Vamos descrever uma tabuada dos produtos de potências de 2 até uma potência de dois com expoente potência de 2, ou seja, vamos descrever a matriz quadrada A de tamanho $2^n \times 2^n$ com $a_{ij} = 2^i \cdot_2 2^j$. As afirmações que faremos são facilmente demonstráveis por indução.

A matriz A é supersimétrica, onde dizemos que uma matriz $2^n \times 2^n$ é supersimétrica se A é simétrica e cada um dos quatro blocos $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ é supersimétrico. Isto é uma definição recursiva que diz que os blocos obtidos dividindo-se cada bloco sucessivamente em quatro blocos são todos simétricos. Além disso, a matriz A tem a seguinte propriedade: se $k < 2^{n-1}$ então $a_{2^{n-1}, 2^{n-1}+k} = a_{2^{n-1}-1,k} +_2 a_{2^{n-1},k}$. Esta equação diz que para obter a primeira linha do último bloco de uma matriz devemos somar (com $+_2$) a última linha do primeiro bloco com a primeira linha do bloco intermediário. Como esta propriedade também vale para os blocos menores podemos escrever, onde $k < 2^{m-1}$ e i e j são múltiplos de 2^m, $a_{i+2^{m-1},j+2^{m-1}+k} = a_{i+2^{m-1}-1,j+k} +_2 a_{i+2^{m-1},j+k}$. É fácil ver que estas propriedades, mais o fato da primeira linha da matriz ser conhecida determinam toda a matriz.

Perguntas relacionando as operações dois tipos tendem a ser difíceis. Por exemplo, quando é que o produto de dois nímeros é par? Ou, mais simplesmente, quando é que o quadrado de um nímero é par? A partir das observações feitas anteriormente basta considerar esta pergunta para potências de 2 e neste caso podemos montar a matriz acima para verificar a paridade de cada produto. Podemos tirar algumas conclusões mais ou menos fáceis a partir desta matriz de zeros e uns mas nenhuma resposta completa e satisfatória (no sentido de ser mais simples que a pergunta original) é conhecida. Deixamos ao leitor o problema de investigar esta pergunta com a advertência de que talvez uma resposta "simples" seja impossível.

Também podemos nos perguntar como funcionam as potências para a multiplicação $\cdot_2$. Segue de propriedades simples de corpos finitos que se $a < 2^{2^n}$ então $a^{2^{2^n}} = a$, onde esta última exponenciação é relativa a $\cdot_2$. A função que leva a em $a^{2^{2^{n-1}}}$ é um automorfismo de ordem 2 deste corpo finito. Não é difícil ver a partir daí e das observações de simplicidade da seção anterior que vale o seguinte curioso teorema: se a é da forma 2^{2^n} então $a^a = a+1$. Assim, por exemplo, $4^4 = 5$ e $16^{16} = 17$. Poderá o leitor enunciar um resultado análogo para a^b se $a = 2^{2^n}$ e $b = 2^{2^{n-1}}$? (Dica: você pode facilmente encontrar todos os algarismos na base 2 menos o último, e decidir se este último é 0 ou 1 pode ser *muito* difícil.)

Códigos e No_2-Espaços Vetoriais

Vamos concluir este capítulo descrevendo uma situação em que nímeros aparecem de forma talvez inesperada.

Considere a seguinte situação: queremos formar um conjunto de seqüências de tamanho N de 0 e 1 mas queremos evitar seqüências muito próximas. Mais precisamente, queremos que duas seqüências sejam diferentes sempre em pelo menos M posições. Considere agora a seguinte maneira de formar um tal conjunto: Percorra a lista de todas as seqüências em ordem lexicográfica. Ao encontrar cada nova seqüência considere a seguinte pergunta: será que eu posso acrescentar esta seqüência ao meu conjunto sem violar a condição de que não podem haver seqüências muito próximas? Se for possível, acrescentamos a seqüência; caso contrário, não. Seja qual for a resposta, passamos para a próxima seqüência e repetimos o processo. Ao terminar, teremos o conjunto desejado.

Para $N = 4$ e $M = 2$, obtemos o seguinte conjunto:

$$\{0000, 0011, 0101, 0110, 1001, 1010, 1100, 1111\}.$$

Para $N = 5$ e $M = 3$, obtemos o seguinte conjunto:

$$\{00000, 00111, 11001, 11110\}.$$

O leitor pode tentar verificar o que acontece para $N = 24$ e $M = 8$. Nem sempre este conjunto acomodará o maior número possível de pontos. É um teorema, entretanto, que o conjunto obtido desta forma é um espaço vetorial sobre o corpo de dois elementos 0 e 1. A demonstração é feita por indução: os elementos aparecem em uma ordem que respeita esta estrutura de espaço vetorial. Em outras palavras, se definirmos uma função que leva os primeiros naturais nos elementos do conjunto segundo a ordem em que aparecem esta função será um isomorfismo de espaços vetoriais onde a soma nos naturais é $+_2$.

O que ocorrerá se permitirmos outros termos na seqüência além de 0 e 1? Se considerarmos, por exemplo, uma seqüência formada de 0, 1 e 2, nada comparavelmente simples acontecerá. Por exemplo, para $N = 6$ e $M = 3$ o conjunto terá 24 elementos, que não pode ser a ordem de nenhum espaço vetorial. Se fizermos $N = 8$ e $M = 3$ o conjunto terá 198 elementos. Se considerarmos seqüências de algarismos de 0 a 7 e fizermos $N = 5$ e $M = 3$, o conjunto terá 256 elementos, mas 256 não é uma potência de 8. Entretanto, se permitirmos a um termo da seqüência assumir qualquer valor natural, ou um valor natural menor do que 2^{2^n}, ou até qualquer valor ordinal, nosso conjunto será um espaço vetorial sobre o corpo de nímeros correspondentes! Isto, é claro, caracteriza a multiplicação de nímeros.

Para concluir, observe que nos dois capítulos anteriores mostramos processos para construir dois Corpos: um ordenado, de característica zero e outro de característica 2. Seria interessante ter um processo análogo para construir, digamos, um Corpo de característica 3. Nenhum tal processo é conhecido e, embora não seja proibido ter esperanças, o que vimos acima é uma razão para levar a crer que não exista uma construção análoga. É claro, por outro lado, que podemos dar uma estrutura de corpo de característica 3 a **On** e fazer as regras de simplicidade valerem por definição. Isto não é tão interessante, entretanto, por não ser tão simples nem tão natural quanto o que fizemos no caso dos nímeros e não devemos esperar que uma estrutura imposta assim quase à força apareça naturalmente em alguma outra situação. Assim, esta permanece mais uma questão em aberto, talvez sem resposta possível.

Capítulo 3
Mais Jogos

Introdução

Este último capítulo não tem a relativa unidade de assunto dos anteriores. Haveria até uma divisão natural em duas partes. Em uma delas, estudamos um pouco mais a classe dos ONAG-jogos sob um ponto de vista que poderia ser chamado de puramente teórico; a outra parte poderia ser chamada de "matemática aplicada" ao estudo de jogos (no sentido mais informal da palavra) ou poderia alternativamente ser chamada de uma lista de exemplos. Dentro desta segunda parte, veremos vários exemplos de jogos que se encaixam perfeitamente na teoria, alguns que se encaixam mal na teoria, e alguns que não se encaixam na teoria de forma alguma.

Alguns Outros Jogos

Nos capítulos anteriores estudamos duas grandes classes de ONAG-jogos: os números e os nímeros. O estudo destas duas classes está muito longe de ser um estudo da classe de todos os jogos. Nesta seção, tentaremos dar uma vaga idéia do grau de complexidade que tem a classe dos jogos.

A coisa mais simples que podemos fazer depois de ter construido números e nímeros é misturá-los: podemos formar jogos da forma $x + *\alpha$. Como funcionará a desigualdade para estes jogos? Afirmamos que $x + *\alpha > 0$ sse $x > 0$, $x + *\alpha < 0$ sse $x < 0$, $x + *\alpha \| 0$ sse $x = 0$ e $\alpha \neq 0$ e $x + *\alpha = 0$ sse $x = 0$ e $\alpha = 0$. A única afirmativa não trivial é que se $x > 0$ então $x + *\alpha > 0$; para isso consideremos o jogo $x + *\alpha$ e devemos mostrar que esquerda ganha. Se esquerda começa, joga para x e ganha já que $x > 0$ por hipótese. Se direita começa jogando para x, esquerda ganha pelo mesmo motivo; se começa jogando $x + *\beta$, $\beta \neq 0$, esquerda responde jogando para x e ganha; se, finalmente, começa jogando para $x_R + *\alpha$ esquerda responde jogando para x_R e ganha, já que $x_R > x > 0$.

Dois exemplos muito simples de jogos que não são soma de número com nímero são $\uparrow = \{0|*\}$ e $\downarrow = -\uparrow = \{*|0\}$. É de verificação imediata que $\uparrow > 0$. O seguinte fato, entretanto, talvez surpreenda o leitor: se $x > 0$ é um número, então $0 < \uparrow < x$. Em geral, diremos que um jogo é *pequeno* quando ele tiver esta propriedade. Isto significa, por exemplo, que $0 < \uparrow < 1/\omega_1$ onde ω_1 é o menor ordinal não enumerável. Para demonstrar este fato, considere $x + \downarrow$ e devemos mostrar que esquerda ganha. De fato, esquerda pode começar jogando $x + *$; como vimos acima, $x + * > 0$, e isto garante a vitória de esquerda. Se direita começar jogando $x + 0 = x > 0$, já garantiu a vitória de esquerda; por outro lado, se começar jogando $x_R + \downarrow$ reduziu o problema a um caso mais simples e por indução podemos afirmar que $x_R + \downarrow > 0$, ou seja, que esquerda ganha. Outra desigualdade talvez surpreendente: $\uparrow + * \| 0$. De fato, se esquerda começar, ganha facilmente jogando para $\uparrow + 0 = \uparrow > 0$; mas direita começando também pode ganhar jogando $* + * = 0$. Finalmente, uma igualdade curiosa que o leitor poderá facilmente verificar: $\uparrow + \uparrow + * = \{0| \uparrow\}$. Esta igualdade pode surpreender porque o lado esquerdo pareceria ser em algum sentido um pouco maior que $\uparrow$ (já que somamos um $\uparrow$, que é positivo, e um $*$, que é igual a menos ele mesmo e portanto não deve aumentar ou diminuir muita coisa) enquanto o lado direito pareceria ser um pouco menor (já que em algum sentido deve estar entre 0 e $\uparrow$); a igualdade mostra que este tipo de raciocínio não pode ser usado indiscriminadamente para jogos.

Este exemplo mostra que nem tudo é tão simples com jogos quanto com números ou nímeros. Daremos agora alguns exemplos avulsos para mostrar algumas das muitas coisas que podem acontecer com jogos. Se α é um ordinal, $+_\alpha = \{0|\{0|-\alpha\}\}$ é um jogo pequeno, isto é, $0 < +_\alpha < x$ para todo número x. Observe que $+_0 = \uparrow$; é fácil mostrar que se $\beta < \alpha$ então $+_\alpha < +_\beta$ e que dado um jogo qualquer z, $z > 0$, existe α com $0 < +_\alpha < z$. Um exemplo simples de um jogo que não é um número ou nímero é $\pm 1 = \{1|-1\}$; é fácil ver que $-(\pm 1) = \pm 1$ e que, se x é um número, $x < \pm 1$ se $x < -1$, $x \| \pm 1$ se $-1 \leq x \leq 1$ e $x > \pm 1$ se $x > 1$. Outro jogo interessante é $\infty = \{\mathbf{R}|\{\mathbf{R}|\mathbf{R}\}\}$, onde os $\mathbf{R}$ indicam que naquela posição entram todos os números reais; é fácil provar que, se x é um número, $x < \infty$ se x é menor que algum real e $x > \infty$ caso contrário.

Depois de exemplos de jogos, alguns exemplos de fatos sobre jogos. Vimos que existem jogos pequenos, mas é fácil ver que não existem jogos "grandes". Mais precisamente, para todo jogo z, existe um ordinal α com $-\alpha < z < \alpha$; de fato, basta tomar α maior do que o aniversário de z. Vimos que existem vários jogos z com $z + z = 0$. Podemos obter z com $z + z \neq 0$ e $z + z + z + z = 0$: por exemplo, $z = \{1| * -1\}$ satisfaz $z + z = *$. Mais geralmente, para qualquer z, podemos obter w com $w + w = z$: basta tomar $w = \{\alpha|z - \alpha\}$ para α um ordinal suficientemente grande. Isto significa que temos jogos com ordem igual a qualquer potência de 2. Agora, uma pergunta: existirá algum jogo com ordem finita que não seja uma potência de 2? Em particular, existe $z \neq 0$ com $z + z + z = 0$?

Exemplos de Jogos Imparciais

No capítulo anterior vimos uma teoria muito completa de jogos imparciais. Vamos agora ver alguns exemplos. Vale advertir desde o início que estes exemplos podem ser multiplicados ao infinito e que nossa escolha aqui é portanto necessariamente subjetiva, limitada e incompleta. O problema em cada exemplo é achar o valor de uma posição geral. Em alguns exemplos daremos a resposta, sem demonstração ou com apenas um esboço de demonstração. Em outros casos daremos uma resposta incompleta ou nenhuma resposta: em alguns casos a resposta é conhecida, em outros não. O leitor é convidado a investigar estes exemplos. Os exemplos são dados de uma forma mais ou menos informal, de uma forma como poderiam realmente ser jogados por humanos. É claro que isso significa que algumas vezes o mesmo exemplo aparece mais de uma vez com "roupagens" diferentes.

A fonte mais óbvia de exemplos é introduzir variações nas regras do nim. Podemos, por exemplo, impor restrições sobre o número de palito a ser retirado: podemos exigir, por exemplo, que ele seja menor do que N, ou que seja ímpar, ou que seja primo. Estas variações são de análise relativamente fácil, bastando determinar o valor de uma pilha de n palitos segundo as novas regras. Variações muito mais sofisticadas vêm de permitir jogadas que afetem mais de uma pilha de palitos. Algumas idéias seriam permitir tirar palitos de uma ou duas fileiras (mas não de três ou mais), permitir tirar palitos de duas fileiras sob a condição de tirar o mesmo número de palitos de cada uma ou permitir, além de tirar palitos, "rebaixar" palitos de uma fileira para outra "abaixo" dela. Uma outra variação é aquela em que linhas são "quebradas" em linhas menores: uma versão interessante é aquela em que não se tira nunca um palito, mas a cada jogada um jogador deve quebrar uma fileira em duas fileiras de tamanhos diferentes.

Outra fonte de exemplos é a de levar uma peça em um tabuleiro "para casa" (a peça chegando a uma certa posição não pode mais mover e o último a jogar ganha). Um exemplo simples mas já interessante é o da dama de xadrex em um tabuleiro quadriculado com um canto, onde a dama sempre deve aproximar-se do canto. O problema é achar o valor da casa na linha i e coluna j: sabemos que esta casa vale 0 se e somente se existir um natural n com $i = [n\phi]$ e $j = [n\phi^2]$ ou $i = [n\phi^2]$ e $j = [n\phi]$, onde $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. (Bem entendido, a casa no canto deve ser a casa $i = j = 0$.)

Uma terceira fonte de exemplos é considerar uma configuração (por exemplo, um tabuleiro com pedras) que simplifica a cada jogada. Como sempre, o último a jogar ganha. Podemos, por exemplo, tomar como tabuleiro uma fileira de casas (talvez numeradas de 0 em diante) com algumas pedras; duas pedras nunca podem ocupar a mesma casa. A cada jogada, o jogador empurra uma pedra para baixo, quantas casas ele quiser mas sem ultrapassar outras pedras. O jogo que acabamos de descrever é equivalente a nim de uma maneira muito simples: deixamos ao leitor a tarefa de descobrir exatamente como. Uma variação deste jogo de análise mais difícil é aquela em que as pedras podem se ultrapassar livremente (mas permanecendo a restrição de que duas pedras não podem ocupar a mesma casa). Um exemplo diferente jogado no mesmo tabuleiro é o "boliche": a cada jogada um jogador retira uma peça ou duas peças em casas vizinhas (derruba com uma bolada um pino ou dois pinos vizinhos).

Uma quarta fonte de exemplos é aquela em que, a cada jogada, alguma coisa está sendo destruída. Podemos, por exemplo, desenhar (em um quadro negro) algumas árvores (formadas por segmentos de reta de tamanho 1); a cada jogada, um jogador corta um galho (isto é, apaga um segmento) com isso naturalmente destruindo tudo o que estava sendo segurado por aquele galho (isto é, tudo aquilo que passa a não mais estar conectado ao "chão" depois de eliminado o galho). Ganha quem acabar de destruir a última árvore. O leitor está convidado a determinar o valor de uma árvore. Este jogo se torna mais difícil se no desenho original houverem outro seres além de árvores, isto é, se alguma coisa puder estar ligada ao chão de mais de uma forma.

Nim: A Versão Misère

A versão mais popular do jogo Nim na verdade é aquela em que quem tira o último palito *perde.* Mais geralmente, podemos inverter as noções de vitória e derrota para qualquer jogo imparcial, ou até para qualquer jogo. Esta versão "invertida" de um jogo é chamada a versão misère.

Existe uma estratégia muito simples para ganhar a versão misère do jogo nim. Basta jogar como na outra versão do jogo *exceto* quando a jogada deixar apenas fileiras com um palito cada uma; neste caso, deixe uma tal fileira a mais ou a menos que o que deixaria no jogo normal. O leitor não terá dificuldade em verificar que esta estratégia de fato funciona.

Isto talvez leve o leitor a pensar que a teoria misère dos jogos imparciais será apenas uma pequena modificação da teoria normal. Isto não é verdade: a teoria misère é muito mais complicada. Uma razão para isto é que a equivalência de jogos que usamos em toda a teoria de números ou nímeros não serve para uma teoria da versão misére: na teoria normal $\{0\}$ e $\{0, \{0\}\}$ são equivalentes mas na versão misère do jogo no primeiro quem começar perde e no segundo quem começar ganha. Uma relação de equivalência apropriada para esta teoria deveria identificar apenas jogos com o mesmo resultado e ser compatível com a soma (sem a qual não há muita teoria). Uma tal relação de equivalência identificaria muito menos jogos do que aquela da teoria normal; isto significa que existem "mais" jogos diferentes na versão misère e que uma teoria para estes jogos deve ser correspondentemente mais complicada.

O Anjo

Concluiremos este capítulo apresentando o que nos parece ser uma das questões em aberto mais interessantes da área. O jogo do anjo e do demônio é jogado em um tabuleiro quadriculado de tamanho qualquer. Um jogador move uma peça (o anjo) no tabuleiro de acordo com certas regras. O outro jogador (o demônio) na sua jogada ocupa definitivamente qualquer casa do tabuleiro (exceto aquela em que está o anjo) tornando-a para sempre inutilizável para o anjo. O anjo ganha se conseguir sair pelo bordo do tabuleiro e escapar. O demônio ganha se conseguir cercar o anjo e impedí-lo de jogar.

Este jogo tem uma versão para cada regra de movimento do anjo. Se o anjo for uma peça que corre distâncias arbitrariamente grandes em uma jogada, como uma torre ou uma dama de xadrez, o anjo ganhará trivialmente. O leitor pode estudar o que ocorre se o anjo for um rei de xadrez: se o tabuleiro for suficientemente pequeno, ganha o anjo-rei, caso contrário, ganha o demônio. (O tamanho limite para o lado de um tabuleiro quadrado é 32.)

Para outras versões do anjo, o problema é mais difícil. Se o anjo puder saltar qualquer distância menor do que N, para N maior ou igual a 2, pareceria que o anjo ganha para qualquer tamanho de tabuleiro. Isto, entretanto, é o problema em aberto que mencionamos pois ninguém sabe provar que o anjo de ordem N possa escapar em um tabuleiro muito grande jogando contra um demônio esperto. Se o anjo puder andar apenas em um certo ângulo menor do que $180°$, ou seja, se ele for forçado a avançar em uma certa direção, então o anjo perde em um tabuleiro suficientemente grande. Na verdade, a pergunta talvez mais difícil é saber o que acontece com um anjo que se mova como um cavalo de xadrez.

Bibliografia

Como já mencionado no prefácio, as duas principais referêncis, recomendadas a qualquer um que queira se aprofundar no tema são:

Conway, John H.*On Numbers and Games*

Berlekamp; Conway; Guy *Winning Ways*

Outras referências para números surreais são:

Knuth,D.E.*Surreal Numbers*

Algumas das primeiras referências sobre Nim e sua teoria são:

Bouton, C.L.*Nim, a game with a complete mathematical theory* Ann.Math.,Princeton(2), 3(1902), 35-39.

Grundy, P.M.*Mathematics and games*Eureka, 2(1939), 6-8.

Grundy, P.M.; Smith, C.A.B. *Disjunctive games with the last player losing* Proc. Camb. Philos. Soc., 52(1956), 527-533.

Estes são apenas uns poucos livros de teoria dos conjuntos do gosto do autor. O primeiro é introdutório e é recomendado para quem nunca estudou teoria dos conjuntos a sério e quer estudar: segundo o autor, este livro contém aquilo que todo matemático deveria saber sobre o assunto. O segundo é um livro muito completo, contendo grande parte de tudo o que se sabe de teoria dos conjuntos e é uma excelente referência; é destinado basicamente a quem trabalha ou quer trabalhar na área.

Halmos*Naïve Set Theory*

Jech*Set Theory*