Nomes para Ordinais:
Além da Hierarquia de Veblen

Nicolau C. Saldanha

0.Introdução

Neste trabalho damos nomes para ordinais (infinitos enumeráveis 'pequenos') de uma forma muito explicita e construtiva. Esta notação é uma generalização da Hierarquia de Veblen ([V]). Vemos também como relacionar esta notação com os dilatadores de Girard ('dilators',[G] e [GV]).

Este artigo foi motivado por algumas idéias do autor que interessaram a algumas pessoas, especialmente a Luis Carlos Pereira, a quem o autor gostaria de agradecer pela ajuda e estímulo. Não há, entretanto, muito de realmente original aqui e este artigo deve ser vista como uma exposição, talvez sob um ponto de vista diferente, de resultados conhecidos ou generalizações destes. O autor gostaria de agradecer ainda ao Departamento de Matemática da PUC-RIO e ao CNPq pelo apoio dado.

1.A Hierarquia de Veblen

A Forma Normal de Cantor diz que qualquer ordinal α pode ser escrito de uma única maneira como:

$$\alpha = \omega^{\alpha_0} \cdot n_0 + \cdots + \omega^{\alpha_{m-1}} \cdot n_{m-1}$$

onde $\alpha_0 > \cdots > \alpha_{m-1}$ são ordinais, m é um natural e n_i, $0 \leq i < m$, são naturais não nulos. Se quisermos usar a Forma Normal de Cantor para dar nomes a ordinais teremos problemas quando chegarmos a ordinais α com

$$\alpha = \omega^{\alpha}.$$

Ou seja, a Forma Normal de Cantor nos ensina como dar nomes a todos os ordinais menores do que o primeiro tal α, que é chamado ϵ_0.

Podemos pensar em extender a Forma Normal de Cantor dando nomes aos ordinais α satisfazendo $\alpha = \omega^{\alpha}$. É fácil ver que a classe dos tais α é *fechada* (no sentido de que o supremo de um conjunto de elementos da classe pertence à classe) e *ilimitada* (isto é, contém ordinais arbitrariamente grandes). Podemos agora denominar aos elementos desta classe de $\epsilon_0, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_\alpha, \ldots$. Com esta nova notação temos nomes para todos os ordinais menores do que o primeiro α com $\alpha = \epsilon_\alpha$. A classe dos tais α também é fechada e ilimitada e seus elementos podem ser denominados, digamos, $\delta_0, \ldots, \delta_\alpha, \ldots$.

É fácil ver que poderíamos repetir este processo com novas letras, mas ao invés de usar todo o alfabeto grego podemos fazer algo um pouco melhor. Mas antes de continuar, algumas considerações mais gerais. Chamaremos uma função de **On** em **On** estritamente crescente com imagem fechada ilimitada de uma função *normal.* Temos assim uma correspondência óbvia entre classes fechadas ilimitadas e funções normais que associa a cada função a sua imagem. Como nos exemplos acima, a classe dos pontos fixos de uma função normal é fechada ilimitada, sendo portanto a imagem de uma outra função normal. Chamaremos a esta nova função normal de *derivada* da primeira, e escreveremos f' para a derivada de f. Assim, nos exemplos acima temos $\exp' = \epsilon$ e $\exp'' = \delta$. Mas é claro que podemos repetir este processo de derivar α vezes. Explicitamente, teríamos

$$x \in \mathrm{Im}(f^{(\alpha)}) \quad \Longleftrightarrow \quad x = f^{(\beta)}(x) \text{ para todo } \beta < \alpha.$$

Escreveremos $f^{(\beta)}(\alpha)$ como $f(\beta, \alpha)$. A melhor maneira de extender a Forma Normal de Cantor deveria agora ser evidente: escrevemos uma potencia de omega α na forma $\alpha = \exp(\beta_1, \beta_0)$ onde $\beta_0 < \alpha$.

Antes de continuar, vamos olhar com um pouco mais de cuidado para aquilo que já temos. A Forma Normal de Cantor é equivalente à observação que, para todo ordinal α, existem únicos β_0 e γ com

$$\alpha = \omega^\beta + \gamma, \quad \gamma < \alpha.$$

Isto não nos ensina a dar nomes a qualquer ordinal pois podemos ter $\beta = \alpha$. O problema de dar nomes a ordinais assim se reduz ao problema de dar nomes às potências de ω. Nossa nova notação diz que todo α potência de ω pode ser escrito de forma única como

$$\alpha = \exp(\beta_1, \beta_0), \quad \beta_0 < \alpha.$$

Isto, é claro, não nos ensina a dar nomes a qualquer ordinal pois podemos ter $\beta_1 = \alpha$. Aliás, é impossível ter um sistema para dar nomes para todos os ordinais, ou mesmo para todos os ordinais enumeráveis, pois qualquer que seja a notação, o conjunto de nomes é enumerável enquanto o conjunto de ordinais enumeráveis é não enumerável.

A maneira de prosseguir deve ser evidente: temos de utilizar mais índices. Ou seja, devemos definir $f(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0)$. Observe que para toda função normal e para todo α temos

$f(\alpha, 0) \geq \alpha$. A classe dos α para os quais $\alpha = f(\alpha, 0)$ é sempre fechada e ilimitada. Esta será a imagem de $f(1, 0, \bullet)$. A partir deste exemplo a definição seguinte deve ser natural:

$$x \in \mathrm{Im}(f(\alpha_2, \alpha_1, \bullet)) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = f(\alpha_2, \beta_1, x) & \text{para todo } \beta_1 < \alpha_1 \\ & \text{e} \\ x = f(\beta_2, \beta_1, x) & \text{para todo } \beta_2 < \alpha_2 \text{ e } \beta_1 < x. \end{cases}$$

Em outras palavras,

$$x = f(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0)) \quad \Longleftrightarrow \quad x \text{ é o menor ordinal satisfazendo as condições abaixo:}$$

$$\begin{cases} x > f(\alpha_2, \alpha_1, \beta_0) & \text{para todo } \beta_0 < \alpha_0 \\ & \text{e} \\ x > f(\alpha_2, \beta_1, \beta_0) & \text{para todo } \beta_1 < \alpha_1 \text{ e } \beta_0 < x \\ & \text{e} \\ x > f(\beta_2, \beta_1, \beta_0) & \text{para todo } \beta_2 < \alpha_2,\ \beta_1 < x \text{ e } \beta_0 < x. \end{cases}$$

Assim, todo α potência de ω pode ser escrito de forma única como

$$\alpha = \exp(\beta_2, \beta_1, \beta_0), \quad \beta_0, \beta_1 < \alpha.$$

Isto ainda não nos ensina a dar nomes a qualquer ordinal pois podemos ter $\beta_2 = \alpha$.

Podemos generalizar isto da seguinte forma: consideraremos $\mathbf{b}_0, \ldots, \mathbf{b}_\gamma, \ldots$ uma família de ordinais onde apenas um número finito destes $\mathbf{b}_\gamma$ é diferente de zero. Uma tal família pode ser escrita como

$$\mathbf{b} = (\gamma \to \mathbf{b}_\gamma, \ldots, 0 \to \mathbf{b}_0)$$

onde poderemos omitir os termos da forma $\gamma \to 0$. Usaremos também a notação

$$\mathbf{b} = \theta^\gamma \cdot \mathbf{b}_\gamma + \cdots + \mathbf{b}_0$$

para esta família onde θ é um símbolo formal; omitimos o termo θ^0 no último termo pois pensamos nele em algum sentido como sendo igual a 1. Podemos definir

$$x \in \mathrm{Im}(f(\ldots, \gamma \to \mathbf{a}_\gamma, \ldots, \bullet)) \quad \Longleftrightarrow \quad x = f(\ldots, \gamma \to \mathbf{b}_\gamma, \ldots, 0 \to x)$$

para toda família $\mathbf{b}$ com $\mathbf{b}_0 = x$ e para a qual exista $\delta > 0$ com

$$\begin{cases} \mathbf{b}_\gamma = \mathbf{a}_\gamma & \text{para todo } \gamma > \delta \\ \mathbf{b}_\gamma < \mathbf{a}_\gamma & \text{para } \gamma = \delta \\ \mathbf{b}_\gamma < x & \text{para todo } 0 < \gamma < \delta. \end{cases}$$

Em outras palavras, $x = f(\mathbf{a})$ é o menor ordinal satisfazendo a seguinte condição: para toda família $\mathbf{b}$ para a qual existe um δ com

$$\begin{cases} \mathbf{b}_\gamma = \mathbf{a}_\gamma & \text{para todo } \gamma > \delta \\ \mathbf{b}_\gamma < \mathbf{a}_\gamma & \text{para } \gamma = \delta \\ \mathbf{b}_\gamma < x & \text{para todo } \gamma < \delta \end{cases}$$

temos $x > f(\mathbf{b})$. A aparição frequente de condições como esta justifica a definição

$$\mathbf{b} \prec_x \mathbf{a} \quad \iff \quad \begin{cases} \mathbf{b}_\gamma = \mathbf{a}_\gamma & \text{para todo } \gamma > \delta \\ \mathbf{b}_\gamma < \mathbf{a}_\gamma & \text{para } \gamma = \delta \\ \mathbf{b}_\gamma < x & \text{para todo } \gamma < \delta. \end{cases}$$

Assim, $f(\mathbf{a})$ é o menor ordinal satisfazendo

$$\mathbf{b} \prec_{f(\mathbf{a})} \mathbf{a} \quad \Longrightarrow \quad f(\mathbf{b}) < f(\mathbf{a}).$$

Observe que

$$f(\ldots, \gamma_n \to \mathbf{a}_{\gamma_n}, \gamma_{n-1} \to \mathbf{a}_{\gamma_{n-1}}, \ldots) = f(\ldots, \gamma_n \to \mathbf{a}_{\gamma_n}, (\gamma_{n-1} \to \mathbf{a}_{\gamma_{n-1}}, \ldots)).$$

Assim, todo α potência de ω pode ser escrito de forma única como

$$\alpha = \exp(\mathbf{b}), \quad \mathbf{b}_\gamma < \alpha \text{ para todo } \gamma.$$

Poderia parecer agora que temos nomes para todos os ordinais: afinal, basta escrever α na notação acima já que podemos supor conhecidos nomes para os $\mathbf{b}_\gamma$. O problema, é claro, é que podemos não ter nomes para os γ. Mais precisamente, podemos ter

$$\alpha = \exp(\alpha \to 1).$$

Esta notação descrita até aqui é, com leves modificações, a Hierarquia de Veblen.

2.Além

Vimos que sabemos dar nomes aos ordinais menores do que o primeiro α com $\alpha = \exp(\alpha \to 1)$. Analogamente, dada uma função normal f podemos considerar os α com $f(\alpha \to 1) = \alpha$. A classe dos tais α é fechada e ilimitada e podemos definir uma nova função normal g como

$$x \in \mathrm{Im}(g) \quad \iff \quad f(x \to 1) = x.$$

A semelhança entre esta definição e a definição de derivada vista anteriormente é evidente. Escreveremos $g(x) = f((1 \to 1) \to 1, x)$ e

$$f((1 \to 1) \to 1, \ldots, \gamma \to \mathbf{a}_\gamma, \ldots) = f((1 \to 1) \to 1, (\ldots, \gamma \to \mathbf{a}_\gamma, \ldots)).$$

Vamos agora unificar e generalizar estas definições.

Queremos definir $f(\mathbf{a})$ para algum tipo mais geral de objeto $\mathbf{a}$. Sabíamos desde o início o que significava $f(\alpha)$, onde $\alpha \in \mathbf{On}$. Aprendemos na seção anterior a definir $f(\mathbf{a})$ onde $\mathbf{a}$ é uma família de ordinais indexada por ordinais que assume valores diferentes de zero apenas um número finito de vezes. Mas o conjunto das funções de β em α com esta propriedade identifica-se naturalmente com α^β, exponenciação ordinal. Podemos assim dizer que aprendemos a definir $f(\mathbf{a})$ para $\mathbf{a} \in \mathbf{On}^{\mathbf{On}}$; observe que $\mathbf{On}$ é identificado com um 'segmento inicial' de $\mathbf{On}^{\mathbf{On}}$ e que nossas definições respeitam esta identificação. (O leitor que estiver preocupado com a legitimidade de falar de $\mathbf{On}^{\mathbf{On}}$ pode substituir todas as instâncias de $\mathbf{On}$ por κ, um cardinal suficientemente grande, fazendo as adaptações evidentes.)

Se $A \neq \emptyset$ é um conjunto bem ordenado qualquer, definimos A^A como o conjunto das funções de A em A que só assumem valores diferentes de 0 (o mínimo de A) um número finito de vezes. O conjunto A^A recebe uma boa ordenação natural e podemos identificar A com um segmento inicial de A^A identificando a com $(0 \to a)$. Podemos agora considerar $A^{(A^A)}$ e identificar A^A com um segmento inicial deste conjunto a partir da identificação anterior. Podemos prosseguir com este processo e definir

$$\epsilon(A) = A \cup A^A \cup A^{(A^A)} \cup \cdots$$

de tal forma que um elemento $\mathbf{a}$ de $\epsilon(A)$ é (a menos de identificações naturais) uma função de $\epsilon(A)$ em A. Observe ainda que se sabemos dar nomes para os elementos de A, temos uma forma evidente de dar nomes para os elementos de $\epsilon(A)$. Observe ainda que se $B \subseteq A$ então $\epsilon(B) \subseteq \epsilon(A)$ mas $\epsilon(B)$ *não* será um segmento inicial de $\epsilon(A)$ mesmo se B for um segmento inicial de A.

Queremos assim definir $f(\mathbf{a})$ para $\mathbf{a} \in \epsilon(\mathbf{On})$. Definiremos $f(\mathbf{a})$ como o menor ordinal satisfazendo

$$\mathbf{b} \prec_{f(\mathbf{a})} \mathbf{a} \quad \Longrightarrow \quad f(\mathbf{b}) < f(\mathbf{a}).$$

Resta-nos ainda definir $\mathbf{b} \prec_x \mathbf{a}$ neste novo contexto. Definamos $\mathbf{a}|\mathbf{b}$ por

$$(\mathbf{a}|\mathbf{b})(\mathbf{c}) = \begin{cases} \mathbf{a}(\mathbf{c}), & \text{se } \mathbf{c} < \mathbf{b} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$\mathbf{b} \prec_x \mathbf{a} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{existe } \mathbf{c} \text{ com} \begin{cases} \mathbf{b}(\mathbf{d}) = \mathbf{a}(\mathbf{d}), & \text{para } \mathbf{d} > \mathbf{c} \\ \mathbf{b}(\mathbf{c}) < \mathbf{a}(\mathbf{c}) \\ \mathbf{b}|\mathbf{c} \in \epsilon(x). \end{cases}$$

É fácil verificar que todas estas definições funcionam bem. A seguinte definição é equivalente à anterior: $f(\mathbf{a})$ é o menor ordinal x com a propriedade que $\mathbf{a} \in \epsilon(x+1)$ e para todo $\mathbf{b}$ com $\mathbf{b} < \mathbf{a}$ e $\mathbf{b} \in \epsilon(x)$ temos $f(\mathbf{b}) < x$. Aqui $\mathbf{b} < \mathbf{a}$ significa simplesmente que existe $\mathbf{d}$ com $\mathbf{b}(\mathbf{c}) = \mathbf{a}(\mathbf{c})$ para $\mathbf{c} > \mathbf{d}$ e $\mathbf{b}(\mathbf{d}) < \mathbf{a}(\mathbf{d})$.

Isto nos dá nomes para ordinais bem maiores do que aqueles alcançáveis pela Hierarquia de Veblen. O menor ordinal não alcançável pela Hierarquia de Veblen é $\exp((1 \to 1) \to 1)$ enquanto o menor ordinal não alcançável pela nossa notação é o menor α com $\alpha = \exp(\cdots(\alpha \to 1) \to \cdots \to 1)$ para qualquer número de níveis. Também podemos escrever este ordinal como

$$\alpha = \sup\{\exp(1), \exp(1 \to 1), \exp((1 \to 1) \to 1), \ldots\}.$$

3.Dilatadores

Definimos a categoria **ON** como sendo a categoria cujos objetos são ordinais e cujos morfismos entre α e β são funções estritamente crescentes de α para β. Existe uma outra categoria intimamente ligada a esta: a categoria de todos os conjuntos bem ordenados onde morfismos são funções estritamente crescentes. Definimos (seguindo [G]) um *dilatador* como sendo um funtor de **ON** em **ON** que preserva limites diretos e pull-backs. Já vimos exemplos de dilatadores como $F(A) = A^A$ ou $F(A) = \epsilon(A)$; a Forma Normal de Cantor tem um parentesco próximo com o dilatador ϵ.

Pensaremos em $F(\mathbf{On})$ como a união dos $F(\alpha)$ pela identificação obtida a partir das inclusões de α como um segmento inicial de β. Assim, $F(\mathbf{On})$ pode ser considerado uma classe bem ordenada. Denotaremos o elemento típico de $F(\mathbf{On})$ por $\mathbf{a}$ ou uma letra semelhante; claramente, $\mathbf{a} \in F(\mathbf{On})$ significa simplesmente que $\mathbf{a} \in F(\alpha)$ para algum α.

Assim, se F é um dilatador e $\mathbf{a} \in F(\mathbf{On})$ definimos $f(\mathbf{a})$ como sendo o menor ordinal x com $\mathbf{a} \in F(x+1)$ e $f(\mathbf{b}) < x$ para todo $\mathbf{b} \in F(x)$ com $\mathbf{b} < \mathbf{a}$. As seções precedentes correspondem a fazer isso com o dilatador ϵ.

Podemos agora pensar em toda nossa construção anterior sob o seguinte aspecto. Tínhamos inicialmente nomes para os naturais. Usando o dilatador ϵ para criar índices, construimos nomes para um conjunto de ordinais, ou, o que é equivalente, criamos um conjunto bem ordenado de nomes. Ou seja, a partir de um dilatador (ϵ) exibimos um processo para a partir de um conjunto bem ordenado (ω) construir outro conjunto bem ordenado (o conjunto de nomes). Obtivemos assim a partir de um dilatador um outro funtor de **ON** em **ON**; é de verificação imediata que este novo funtor é um dilatador. Denotaremos este novo funtor por $F^{[1]}$; descrevemos, portanto, nas últimas seções, $\epsilon^{[1]}(\omega)$.

Diremos que um dilatador F é *recursivo* se podemos dar nomes recursivamente aos elementos de $F(\alpha)$ a partir de nomes para elementos de α. Se F é recursivo, $F^{[1]}$ também é recursivo. Podemos além disso iterar este processo para definir um dilatador $F^{[\gamma]}$ para qualquer ordinal γ. Se α e F forem recursivos, o dilatador $F^{[\alpha]}$ também será recursivo. Temos assim facilmente nomes para ordinais até o primeiro α com

$$\alpha = \epsilon^{[\alpha]}(\omega).$$

Poderíamos prosseguir além desse ponto com novas iterações mas acreditamos já ter ficado claro como prosseguir com esse processo. Assim, pararemos nossa construção de nomes para ordinais e de funtores recursivos neste ponto.

Bibliografia:

[GV] Jean-Yves Girard, Jacqueline Vauzeilles, *Functors and Ordinal Notations I: A Functorial Construction of the Veblen Hierarchy*, The Journal of Symbolic Logic, vol. 49 (1984), pp. 713-729.

[G] Jean-Yves Girard, Π^1_2*-logic I: Dilators*, Annals of Mathematical Logic, vol. 21 (1981), pp. 75-219.

[V] Oswald Veblen, *Continuous increasing functions of finite and transfinite ordinals*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 9 (1908), pp. 280-292.