Precisa-se de alguém para ganhar muito dinheiro

Nicolau C. Saldanha

Versão preliminar: 14 de março de 1997

Introdução

Neste artigo descreveremos uma forma de usar a matemática para o mal. Mais precisamente, descreveremos uma aposta que parece honesta mas não é e deixamos as aplicações a cargo do leitor.

Para usar o método, o leitor precisa de uma moeda honesta e um amigo que, por razões que logo se tornarão claras, será chamado de *otário*. O leitor deve sugerir ao otário uma aposta a ser decidida no cara ou coroa mas, talvez sob pretexto de tornar a aposta mais emocionante, ele deve sugerir o seguinte procedimento. O otário escolhe uma seqüência de três caras e coroas, como por exemplo, cara-coroa-cara (que representaremos por **ckc**). O leitor a seguir escolhe outra seqüência; digamos **cck** (cara-cara-coroa). A moeda deve ser jogada até uma das duas seqüências aparecer e ganha o jogador cuja seqüência aparecer primeiro. Assim, se a moeda cair **kckkcckc**... ganha o leitor pois **cck** apareceu antes de **ckc**.

A Tabela 1 mostra a probabilidade que o leitor tem de ganhar em cada situação possível: a coluna indica a jogada do otario e a linha a jogada do leitor. Os $-$ na diagonal indicam situações proibidas. Note que na maioria dos casos as probabilidades *não* são iguais para os dois jogadores! Mais ainda: em cada coluna há sempre um elemento maior ou igual a 2/3: em outras palavras, para qualquer jogada do otário o leitor sempre pode responder de forma a ter probabilidade pelo menos 2/3 de ganhar. É essencial para preservar a injustiça do jogo que o otário escolha sua seqüência *primeiro*: é aí que reside toda a vantagem para o leitor já que o conjunto de jogadas disponível para cada um é o mesmo.

	ccc	**cck**	**ckc**	**ckk**	**kcc**	**kck**	**kkc**	**kkk**
ccc	$-$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$
cck	$\frac{1}{2}$	$-$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{10}$
ckc	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	$-$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{12}$
ckk	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$
kcc	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}$
kck	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}$
kkc	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-$	$\frac{1}{2}$
kkk	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$-$

Tabela 1

1. Como calcular as probabilidades: um ponto de vista elementar

Neste seção ilustraremos com dois exemplos a forma “artesanal” de calcular estas probabilidades; na próxima seção veremos um método mais “industrial”.

Suponhamos que o otário escolha **ccc** e o leitor (que conhece nossa tabela) escolha **kcc**. Se o otário tiver a sorte de tirar três caras imediatamente ele ganha mas afirmamos que se isto não ocorrer ele sempre perde. De fato, o leitor ganha quando sairem duas caras seguidas pela primeira vez, pois antes destas duas caras obviamente caiu uma coroa; não é possível que o otário ganhe antes disso pois ele também precisa de duas caras seguidas para ganhar.

Suponhamos agora que o otário escolha **ckc** e o leitor escolha **cck**. O Diagrama 2 descreve bem a situacao. Os seis vertices indicam as seis situações possíveis durante o processo de jogar a moeda. O ponto indica que nenhum jogador tem como esperar fazer uso das jogadas já feitas, ou seja, ou nenhum lance ainda foi feito, ou foi lançado apenas um **k**, ou os dois últimos lances foram **kk**; como o jogo sempre começa nesta situação, chamaremos este vértice de *inicial*. O **c** indica que o último lance foi um **c** mas o anterior ou não existiu ou foi um **k**. Os vértices **cc** e **ck** indicam que estes foram os dois últimos lances. Finalmente, os vértices **cck** e **ckc** indicam que o jogo terminou; chamaremos estes vértices de *finais*.

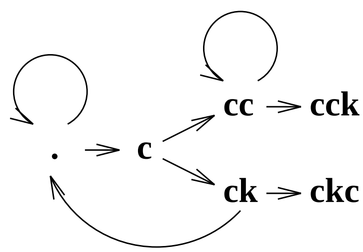

Diagrama 2

As duas setas partindo de cada vértice (exceto os finais) indicam como a situação se modifica a cada lance de moeda: elas correspondem às possibilidades de tirar **c** ou **k** em um dado momento. Queremos agora calcular a probabilidade de vitória do leitor dado que o jogo chegou a uma certa situação. Temos assim quatro probabilidades a serem calculadas: $p_\cdot, p_{\mathbf{c}}, p_{\mathbf{cc}}$ e $p_{\mathbf{ck}}$; consideramos naturalmente $p_{\mathbf{cck}} = 1$ e $p_{\mathbf{ckc}} = 0$. Como a partir de cada vértice não final as probabilidades associadas às duas setas são iguais, temos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} p_\cdot &= \frac{1}{2}(p_\cdot + p_{\mathbf{c}}) \\ p_{\mathbf{c}} &= \frac{1}{2}(p_{\mathbf{cc}} + p_{\mathbf{ck}}) \\ p_{\mathbf{cc}} &= \frac{1}{2}(p_{\mathbf{cc}} + 1) \\ p_{\mathbf{ck}} &= \frac{1}{2}p_\cdot. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, temos $p_\cdot = 2/3$, conforme mostra a tabela.

2. Como calcular as probabilidades: uma fórmula geral

Podemos calcular as probabilidades de forma mais simples e uniforme do que o que vimos na seção anterior usando álgebra linear. Antes de mais nada, numeremos as 8 possíveis jogadas: fazemos **ccc** corresponder a 0, **cck** corresponder a 1 e assim por diante até fazermos **kkk** corresponder a 7. É conveniente começar de 0 pois assim cada seqüência é a expansão binária de seu índice, fazendo **c** corresponder a 0 e **k** corresponder a 1. Com estes índices, se a jogada do otário é i e a resposta do leitor é j (devemos naturalmente supor $i \neq j$) chamamos a probabilidade de vitória do leitor de $p_{i,j}$.

Cada vez que jogamos a moeda jogamos fora a primeira letra e acrescentamos o novo lance no final; estas transições são descritas pela matriz

$$A^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } j \equiv 2i \pmod 8 \quad \text{ou} \quad j \equiv 2i+1 \pmod 8, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

ou, escrevendo i e j na base 2, sempre com 3 algarismos,

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se os dois últimos algarismos de } i \text{ coincidem com os dois primeiros de } j, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Seja

$$B = 4(I + A + A^2) = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix},$$

cujas entradas chamaremos de $b_{i,j}$.

Proposição: *Para quaisquer i e j diferentes com $i \neq j$ temos*

$$p_{i,j} = \frac{b_{i,i} - b_{i,j}}{b_{i,i} - b_{i,j} - b_{j,i} + b_{j,j}}.$$

Voltando mais uma vez ao exemplo em que o otário joga **ckc** e o leitor joga **cck** temos $i = 2$ e $j = 1$, $b_{i,i} = 5$, $b_{i,j} = 1$, $b_{j,i} = 2$ e $b_{j,j} = 4$, e a fórmula acima novamente nos dá a probabilidade de $2/3$.

Demonstração: A matriz A^T descreve a transição ao jogar mais uma vez a moeda apenas se não paramos nunca. No nosso jogo, as posições i e j assumiram um papel especial: ao chegarmos em uma destas posições o jogo acaba. Podemos definir uma nova matriz $C_{i,j}$ substituindo as colunas i e j de A^T pelas colunas correspondentes da matriz identidade. No nosso segundo exemplo, onde $i = 2$ (**ckc**) e $j = 1$ (**cck**), temos

$$C_{i,j} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Após três jogadas, a probabilidade associada a cada situação é a mesma, e isto é descrito pelo vetor de oito coordenadas $v_0 = (1/8, 1/8, \ldots, 1/8)$. Após quatro jogadas, as probabilidades são dadas por $C_{i,j}v_0$ e, mais geralmente, após n jogadas as probabilidades são dadas por $C_{i,j}^{n-3}v_0$. Finalmente, $p_{i,j}$, a probabilidade de vitória do leitor, é a j-ésima coordenada de

$$v_\infty = \lim_{n\to\infty} C_{i,j}^n v_0.$$

A i-ésima coordenada é $1 - p_{i,j}$ e as demais coordenadas são 0.

Para $n \geq 3$, temos

$$A^n = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

a projeção ortogonal na reta (t, t, t, t, t, t, t, t). Assim, $B(I - A) = (I - A)B = 4(I - A^3)$ é 4 vezes a projeção ortogonal no hiperplano $\sum x_i = 0$. Sejam e_i os vetores da base canônica e seja $w_{i,j} = B(e_i - e_j)$. A coordenada k de $w_{i,j}$ é $b_{i,k} - b_{j,k}$ e a soma das coordenadas de $w_{i,j}$ é zero. Pela identidade acima, temos $(I - A)w_{i,j} = 4(e_i - e_j)$, ou seja, as únicas coordenadas em que $w_{i,j}$ e $Aw_{i,j}$ são diferentes são a i-ésima e a j-ésima. Isto significa que $w_{i,j} = C_{i,j}^T w_{i,j}$. Assim, $w_{i,j} \cdot Cv = w_{i,j} \cdot v$ para todo v donde $w_{i,j} \cdot v_\infty = w_{i,j} \cdot v_0$. Mas $w_{i,j} \cdot v_0 = 0$ e, usando a fórmula para as coordenadas de $w_{i,j}$ e v_∞ temos

$$(b_{i,i} - b_{j,i})(1 - p_{i,j}) + (b_{j,i} - b_{i,i})p_{i,j} = 0.$$

Isto nos dá o valor desejado para $p_{i,j}$ desde que $b_{i,i} - b_{i,j} - b_{j,i} + b_{j,j} \neq 0$. Mas o lado esquerdo é sempre positivo pois para todo k temos $b_{k,k} \geq 4$ (a contribuição da matriz identidade) e para $k \neq k'$ temos $b_{k,k'} \leq 3$ (a soma do valor máximo de todas as outras contribuições). ■

3. Variações

A variação mais óbvia no método consiste em considerar seqüências de outros comprimentos. Seja l este comprimento: o que consideramos até agora foi o caso $l = 3$. Os métodos para calcular probabilidades vistos na Seção 1 generalizam-se facilmente. Também a Proposição da Seção 2 passa para o caso geral fazendo $B = 2^{l-1}(I + A + \cdots + A^{l-1})$.

O caso $l = 1$ é bastante trivial mas no caso $l = 2$ já existe uma situação assimétrica. Se o otário justificar esta denominação escolhendo **cc** ou **kk**, o leitor pode responder **kc** e **ck**, respectivamente, e tem probabilidade $3/4$ de vencer. Por outro lado, se o otário escolher **ck** ou **kc** o leitor é obrigado a se contentar com uma aposta justa (probabilidade $1/2$).

Para $l \geq 4$ o jogo torna-se mais complicado. Podemos tirar algumas conclusões simples a partir da Proposição: a probabilidade é sempre um racional, seus valores mínimo e máximo são 2^{-l} e $1 - 2^{-l}$ e seu denominador é sempre menor que 2^{l+1}. Mas para as perguntas mais interessantes não temos resposta. Na verdade, esta seção existe basicamente para apresentar alguns problemas sobre os quais o leitor poderá pensar e tabelas que poderão ajudá-lo. A Tabela 3 dá as probabilidades associadas às várias possíveis jogadas para $l = 4$; as seqüências aparecem como sempre em ordem alfabética e escrevemos apenas as oito primeiras linhas pois a tabela tem uma evidente simetria central.

cccc	—	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{2}$
ccck	$\frac{1}{2}$	—	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{22}$
cckc	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	—	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{8}$
cckk	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	—	$\frac{3}{7}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{4}$
ckcc	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{7}$	—	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{8}$
ckck	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{2}$	—	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{8}$
ckkc	$\frac{7}{11}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	—	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{8}$
ckkk	$\frac{7}{11}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	—	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$

Tabela 3

Podemos observar que a probabilidade mais baixa com a qual o leitor é obrigado a se conformar é $9/14 \approx 0.64286$, correspondente à jogada **ckcc** do otário, com resposta **kckc**. Damos na Tabela 4 esta "probabilidade minimax" para os primeiros valores de l. Observamos que para $4 \leq l \leq 16$ a "probabilidade minimax" e as jogadas correspondentes

l	probabilidade minimax	melhor jogada do otário	melhor resposta
1	$\frac{1}{2}$	**c**	**k**
2	$\frac{1}{2}$	**ck**	**cc**
3	$\frac{2}{3} \approx 0.66667$	**ckc**	**kck**
4	$\frac{9}{14} \approx 0.64286$	**ckcc**	**kckc**
5	$\frac{17}{26} \approx 0.65385$	**ckkcc**	**kckkc**
6	$\frac{33}{50} = 0.66$	**ckkkcc**	**kckkkc**
7	$\frac{65}{98} \approx 0.66327$	**ckckkcc**	**kckckkc**
8	$\frac{129}{194} \approx 0.66495$	**ckcckkcc**	**kckcckkc**
$l \leq 16$	$\frac{2^{l-1}+1}{2^{l-1}+2^{l-2}+2}$	**ckc**... **ckkcc**	**kckc**... **ckkc**

Tabela 4

seguem o padrão da última linha da tabela e é razoável conjecturar que esta última linha na verdade vale para todo $l \geq 4$.

Outra pergunta interessante é saber qual a melhor resposta para cada jogada do otário: aqui há uma conjectura simples e razoável, que verificamos para $l \leq 16$. Pegue a seqüência do otário, jogue fora a última letra e acrescente algo na primeira posição: a conjectura é que uma das duas seqüências obtidas desta forma é a melhor resposta. Intuitivamente, poderíamos dizer que o leitor tenta ganhar justo antes de o otário conseguir completar sua seqüência. Na Tabela 5 listamos, para $l = 5$, as probabilidades associadas a estas duas respostas; a estrela indica a melhor resposta. Não percebemos nenhum padrão evidente na posição das estrelas e vale observar que nem sempre as duas jogadas são boas.

Nicolau C. Saldanha

IMPA, Estrada Dona Castorina 110
Jardim Botânico, Rio de Janeiro, RJ 22460-320, BRASIL

UMPA, ENS-Lyon, 46 Allee d'Italie
69364 Lyon cedex 07, FRANCE

nicolau@impa.br, nsaldanh@umpa.ens-lyon.fr
http://www.impa.br/~nicolau/, http://www.umpa.ens-lyon.fr/~nsaldanh/

Jogada do otário	**c** . . .	**k** . . .
ccccc	–	$\frac{31}{32} = 0.96875$ ($\star$)
cccck	$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{15}{16} = 0.9375$ ($\star$)
ccckc	$\frac{2}{3} \approx 0.66667$ ($\star$)	$\frac{5}{8} = 0.625$
ccckk	$\frac{2}{3} \approx 0.66667$ ($\star$)	$\frac{5}{8} = 0.625$
cckcc	$\frac{2}{3} \approx 0.66667$ ($\star$)	$\frac{5}{8} = 0.625$
cckck	$\frac{2}{3} \approx 0.66667$ ($\star$)	$\frac{5}{8} = 0.625$
cckkc	$\frac{2}{3} \approx 0.66667$ ($\star$)	$\frac{5}{8} = 0.625$
cckkk	$\frac{2}{3} \approx 0.66667$ ($\star$)	$\frac{5}{8} = 0.625$
ckccc	$\frac{7}{12} \approx 0.58333$	$\frac{17}{24} \approx 0.70833$ ($\star$)
ckcck	$\frac{7}{12} \approx 0.58333$	$\frac{17}{24} \approx 0.70833$ ($\star$)
ckckc	$\frac{10}{13} \approx 0.76923$ ($\star$)	$\frac{1}{2} = 0.5$
ckckk	$\frac{8}{11} \approx 0.72727$ ($\star$)	$\frac{15}{26} \approx 0.57692$
ckkcc	$\frac{7}{11} \approx 0.63636$	$\frac{17}{26} \approx 0.65385$ ($\star$)
ckkck	$\frac{9}{13} \approx 0.69231$ ($\star$)	$\frac{13}{22} \approx 0.59091$
ckkkc	$\frac{2}{3} \approx 0.66667$ ($\star$)	$\frac{5}{8} = 0.625$
ckkkk	$\frac{2}{3} \approx 0.66667$ ($\star$)	$\frac{5}{8} = 0.625$

Tabela 5