CONJUNTOS DE CANTOR E TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

AUTORES: M Sc HUMBERTO GULLO E M Sc LÚCIO COELHO
ORIENTADOR: Dr Sc MARCOS CRAIZER
Departamento de Matemática - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - 2014

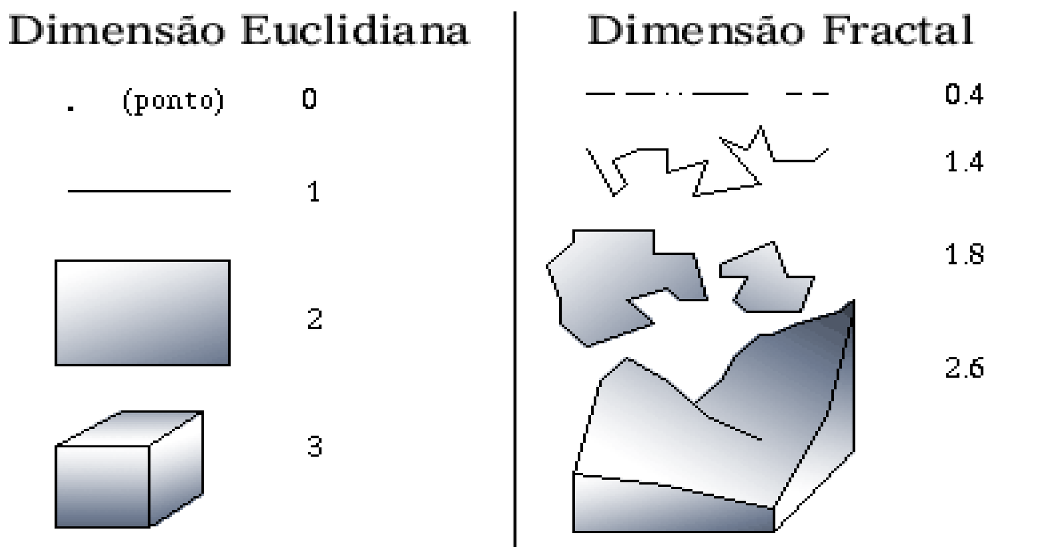
FRACTAIS

Um fractal é um objeto que apresenta invariância na sua forma na medida em que a escala, sob a qual o mesmo é analisado, é alterada, mantendo-se a sua estrutura idêntica à original.
Esta descrição leva-nos a uma noção de infinito de uma forma intuitiva que poderá servir de aplicação do conceito de limite matemático.
As principais propriedades que caracterizam os fractais são:

A ***auto-semelhança*** é identificada quando uma porção, de uma figura ou de um contorno, pode ser vista como uma réplica do todo, numa escala menor.

A **complexidade infinita** refere-se ao fato de que o processo de geração de uma figura, definida como sendo um fractal, é recursivo.

A **dimensão** de um fractal, ao contrário do que ocorre na Geometria Euclidiana, não é necessariamente um valor inteiro. No caso da dimensão fractal, ela é uma quantidade fracionária, representando o grau de ocupação da estrutura no espaço que a contém.



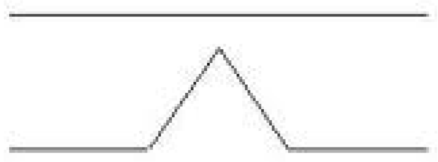
DIMENSÃO FRACTAL

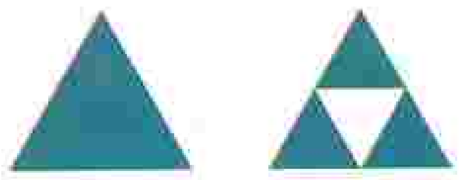
Dimensão Hausdorff: $d = \log_{\left(\frac{L}{U}\right)} N$

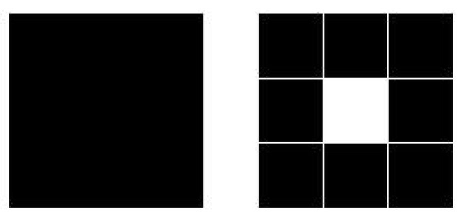
Onde:
•d é a dimensão
•N é o número de partes em cada etapa da divisão
•L é o comprimento inicial (ou lado) do objeto a que foi dividido em N partes iguais
•U é o comprimento de cada segmento obtido através da divisão

Ou simplesmente: $d = \log_{escala} n^o \; de \quad cópias$

Vejamos alguns cálculos:

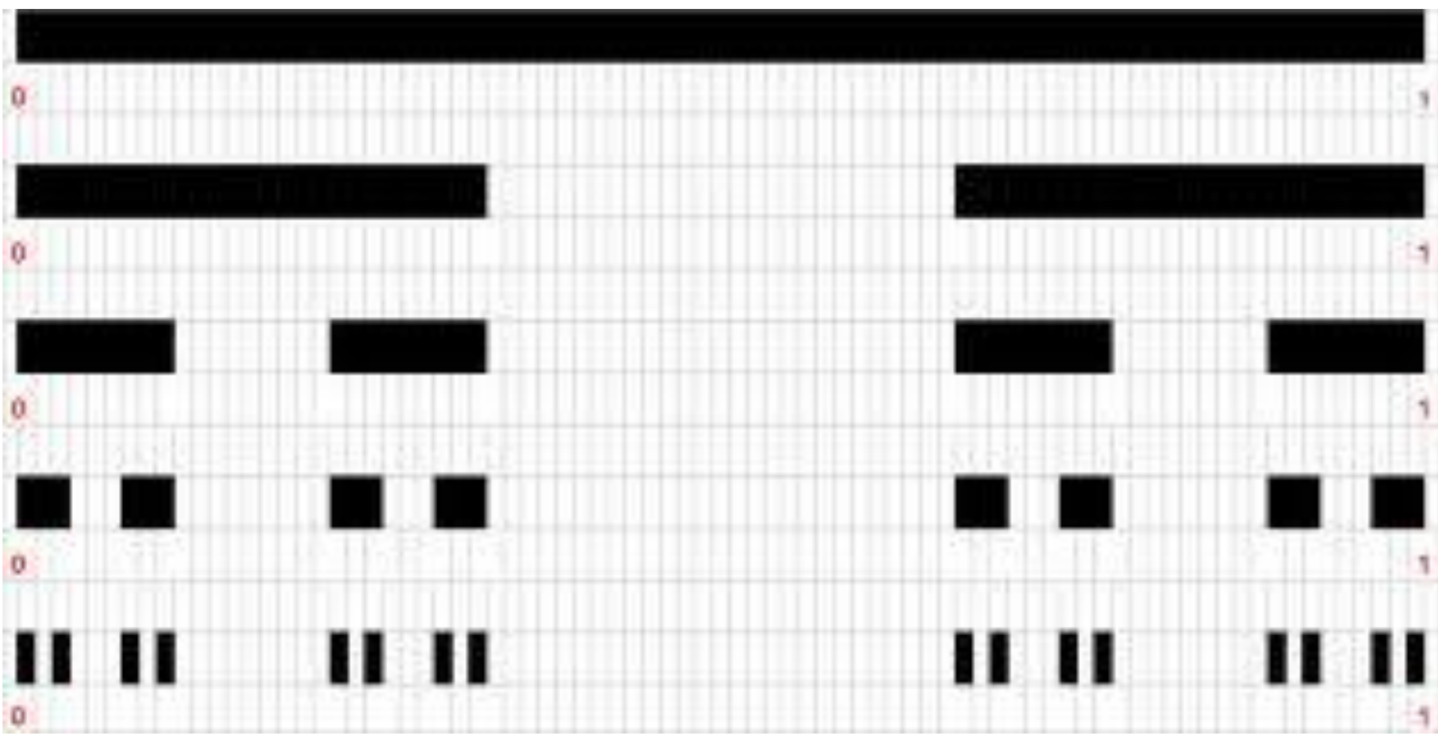
Curva de Koch:  $d = \log_3 4$

Triâgulo de Sierpisnki  $d = \log_2 3$

Tapete de Sierpinski  $d = \log_3 8$

CONJUNTO DE CANTOR

O Conjunto de Cantor, também conhecido como Poeira de Cantor, é um subconjunto infinito de pontos no intervalo unitário [0,1]. A sua construção numérica permite-nos obter a ideia de um subconjunto fechado de números reais. A construção geométrica permite-nos ter uma melhor percepção deste conceito e leva-nos à estruturação de um fractal.



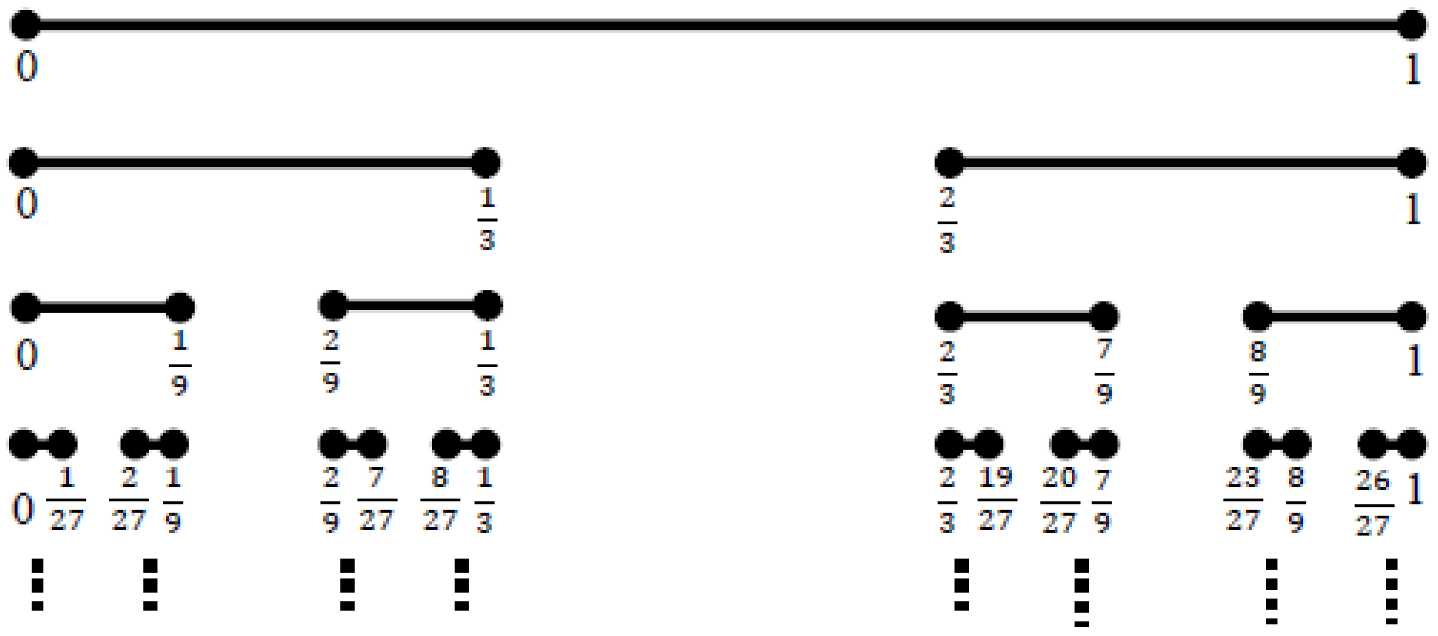
Um conjunto ***K é dito um conjunto de Cantor se for:***
Compacto (fechado e limitado)
Perfeito (cada um de seus pontos é um ponto de acumulação)
Totalmente desconexo (se não contém intervalos)

O CONJUNTO *K É VAZIO?*

Por mais intrigante que seja, K é infinito. Para cada etapa n existem 2^{n+1} extremos; como são infinitas as etapas, o conjunto dos extremos possui uma quantidade infinita de elementos, e está contido em K. Além disso, todo extremo é um número racional, e como o conjunto Q é enumerável, segue-se que o conjunto E (dos extremos) é um infinito enumerável.

REPRESENTAÇÃO NA BASE 3

Alguns dos extremos inferiores e suas representações na base 3:



$$\frac{8}{9} = 0 + 2.\frac{1}{3} + 2.\frac{1}{3^2} = 0,22_{(3)}$$

$$\frac{2}{3} = 0 + 2.\frac{1}{3} = 0,2_{(3)}$$

$$\frac{74}{81} = 0 + 2.\frac{1}{3} + 2.\frac{1}{3^2} + 0.\frac{1}{3^3} + 2.\frac{1}{3^4} = 0,2202_{(3)}$$

A representação em base 3 dos extremos inferiores possui apenas dígitos 0 e 2.

O número 0,022020020000200000002...(3)

Os algarismos 2 ocupam posições dadas pelos números de Fibonacci.
É um número irracional e pertence ao conjunto de Cantor.
Uma aproximação para ele é 0,3048328352 (até a décima casa decimal). Esse, então foi chamado de número de Cantor-Fibonacci

k = 0,022020020000200000002...(3).

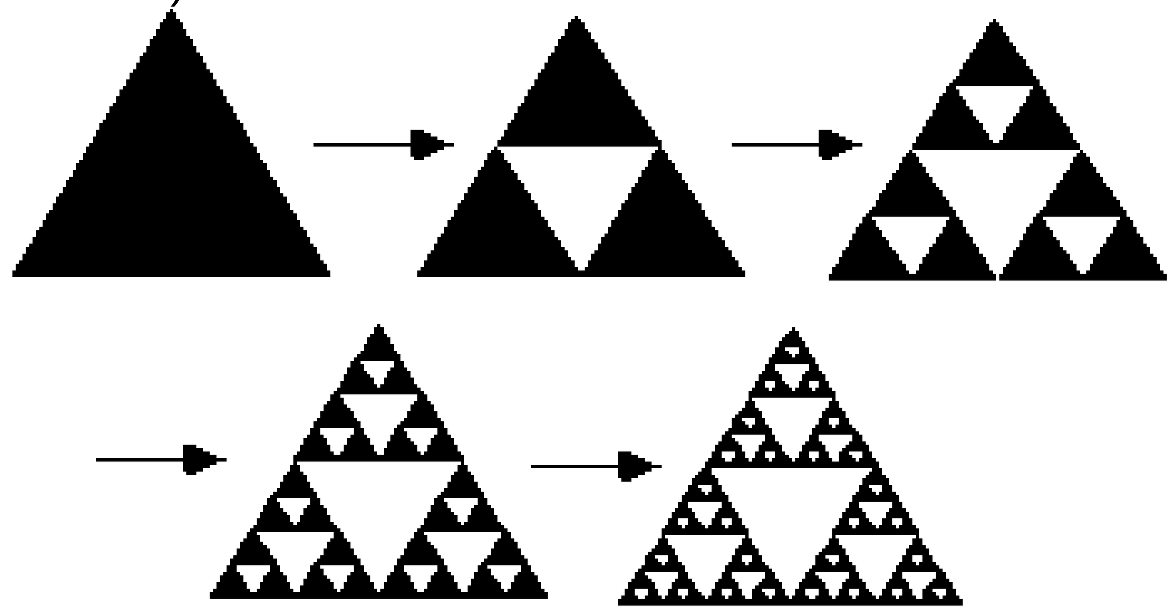
Outro fato curioso

Um artigo de pesquisa publicado em 1990 por Charles R. Wall na revista The Fibonnacci Quarterly demonstra que estes 14 números são os únicos em todo o conjunto K que possuem expansão decimal finita!

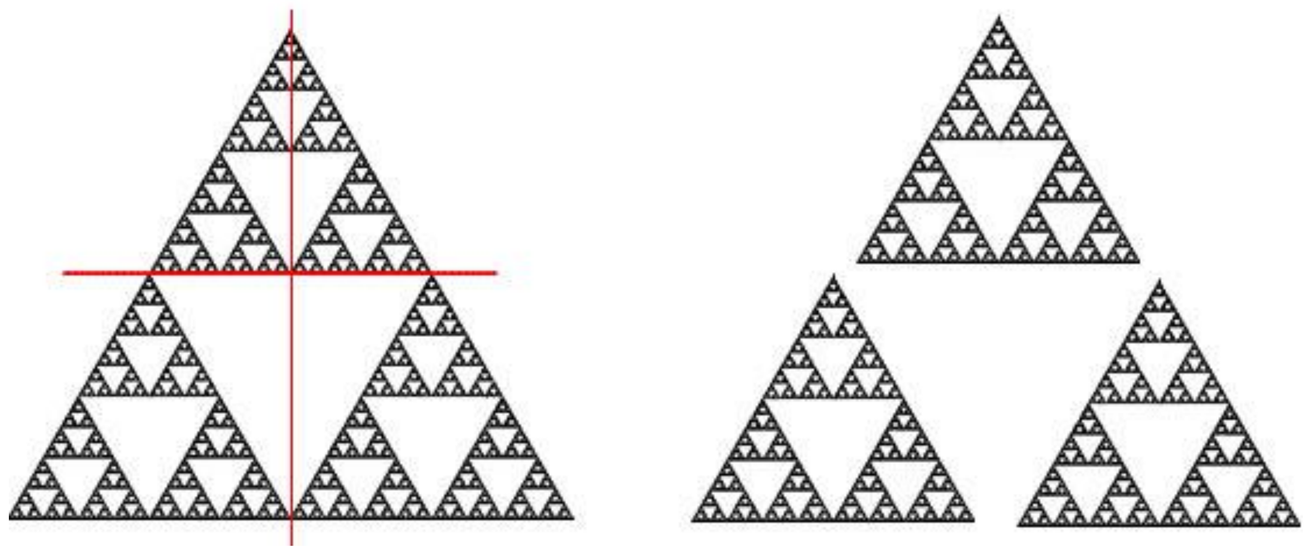
$$\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10}, \frac{1}{40}, \frac{3}{40}, \frac{7}{40}, \frac{9}{40}, \frac{13}{40}, \frac{27}{40}, \frac{37}{40}, \frac{39}{40} \in K$$

TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

O fractal que hoje se conhece como **Triângulo de Sierpinski** foi descoberto em 1917 pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969).



O**Triângulo de Sierpinski**, surpreende pelo perímetro infinito e área zero e muito mais pela sua dimensão, um valor não inteiro que a princípio, causa certa estranheza.



Área e perímetro

Relativamente ao triângulo equilátero inicial (*N = 0*), *com perímetro P e área A, constrói-se a tabela a seguir após um certo número N de interações :*

N	Perímetro	Área
0	P	A
1	$P_1 = \frac{3}{2}P$	$A_1 = \frac{3}{4}A$
2	$P_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 P$	$A_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 A$
3	$P_3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 P$	$A_3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 A$
⋮	⋮	⋮
n	$P_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n P$	$A_3 = \left(\frac{3}{4}\right)^n A$

Aplicando o limite das sequencias, temos

$$\lim_{n \to \infty} P_n = \lim_{n \to \infty} \left(\tfrac{3}{2}\right)^n P = \infty \qquad \lim_{n \to \infty} A_n = \lim_{n \to \infty} \left(\tfrac{3}{4}\right)^n A = 0$$