ATIVIDADES PROPOSTAS PARA O ENSINO DOS NÚMEROS BINÁRIOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Ana Carolina Vargas Frederico

PROFMAT PUC-Rio

Produto Educacional

Maio/2020

Sumário

1 Introdução

O presente trabalho é o produto educacional resultante da dissertação de mestrado de Ana Carolina Vargas Frederico, aluna do PROFMAT da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio), cujo título é “Números binários: uma proposta de ensino para a educação básica”.

Este produto traz uma proposta de ensino de números binários na educação básica através de atividades lúdicas e motivadoras baseadas em: um truque para realizar uma “mágica” de adivinhação, uma mensagem secreta que precisa ser desvendada e um jogo chamado Nim, que possui uma estratégia vencedora desenvolvida e demonstrada pelo matemático Charles L. Bouton.

Os números binários foram o tema escolhido por sua relevância perante a era digital em que vivemos. Estudar os números binários desde a educação básica permite aos alunos se familiarizarem e compreenderem desde cedo uma ferramenta de linguagem tecnológica indispensável. Em Mendes (2018, p. 303 e 304), podemos ver esse papel fundamental dos números binários na tecnologia sendo destacado:

> Os números binários são um objeto de saber que contribui atualmente à “Era Digital” devido ao advento da digitalização mundial a partir do século XX. A presença de aspectos relativos à representação binária de número tem aumentado em consequência a sua utilização indispensável na comunicação entre artefatos tecnológicos digitais por meio de sequências de 0s e 1s em codificações de caracteres, figuras, vídeos, sons, entre outros.

Com este produto, esperamos contribuir com os professores da educação básica que estejam buscando enriquecer suas aulas com atividades que vão além do ensino tradicional. Para que mais professores tenham acesso podemos disponibilizá-lo, basta entrar em contato.[1]

[1] E-mail de contato: ana_vargasf@hotmail.com

2 Os Cartões Mágicos Binários

Os cartões mágicos binários nos possibilitam fazer uma “mágica” intrigante e divertida, daquelas em que todos ficam ansiosos esperando para que o truque seja revelado. Como o próprio nome sugere, são os números binários que estão por trás dessa “mágica”. A seguir explicitamos uma versão disponível encontrada em Steffenon e Guarnieri (2016).

Os cartões são como segue:

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

A “mágica” funciona assim: pede-se para que uma pessoa pense em um número de 1 a 63, em seguida, são apresentados 6 cartões com 32 números em cada. Esta pessoa deve dizer em quais destes cartões o número que ela pensou aparece. Feito isso, o “mágico” em questão poderá adivinhar o número pensado.

A “mágica” acontece porque esses cartões foram planejados para que, naquele que se inicia pelo número 1, estejam todos os números até o 63 que necessitam da potência $2^0 = 1$ para serem escritos na base binária. Da mesma forma, no cartão que se inicia pelo número 2, estão todos os números até 63 que precisam da potência $2^1 = 2$ para serem escritos na base binária. E com este mesmo raciocínio, são construídos os cartões que se iniciam com os números 4, 8, 16 e 32 e, assim, representando todas as potências de 2 necessárias para escrevermos na base binária os números de 1 a 63.

Para passar um número da base binária para a base decimal basta somar as potências de 2. Exemplo: $(1101)_2 = 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0 = 8 + 4 + 1 = 13$. Portanto, o número 13 aparece nos cartões que se iniciam com os números 8, 4 e 1. Assim que for dito os cartões em que ele aparece, basta somar esses números para a "mágica" acontecer e o número pensado ser descoberto.

Os cartões mágicos binários podem ir além do número 63. Basta construir novos cartões que se iniciem com as próximas potências de base 2 e acrescentar os novos números nos cartões aos quais eles devem pertencer com a lógica já enunciada. Portanto, se 2^b é a maior potência de 2 que inicia um cartão, então, teremos um total de $2^{b+1} - 1$ números possíveis para serem adivinhados.

3 O Jogo de Nim

Pouco se sabe sobre a origem do Nim, mas acredita-se ter sido originado na China. Segundo Gardner (1961), um dos primeiros trabalhos dedicados a este jogo foi do matemático Charles L. Bouton. Neste artigo, publicado em 1902, Bouton analisa o jogo e apresenta uma teoria matemática para uma estratégia vencedora.

> O jogo aqui discutido interessou ao escritor por conta de sua aparente complexidade, e sua teoria matemática extremamente simples e completa. O escritor não conseguiu descobrir muito sobre sua história, embora algumas variações do jogo estejam sendo praticadas em algumas faculdades e feiras americanas. Ele tem sido chamado de Fan-Tan, mas como não se trata do jogo chinês que tem esse nome, o nome deste artigo[2] é proposto para ele. (BOUTON, 1902, p. 35, tradução nossa)

Foi neste artigo que o jogo recebeu o nome que conhecemos hoje. Nome este que, em inglês arcaico significa apanhar, em alemão (*Nimm*), significa tirar e, se rotacionado em 180º, se transforma na palavra *win* que, em inglês, significa vencer. (ALMEIDA; CARVALHO, 2016, p.19).

O Nim é um jogo de regras simples e de fácil entendimento feito para duas pessoas jogarem. São dispostos em uma mesa grupos de um determinado objeto, digamos palitos. As quantidades de grupos e de objetos (palitos) em cada grupo são arbitrárias. A jogada é feita da seguinte maneira: o jogador escolhe um dos grupos e retira dele a quantidade de palitos que desejar. A restrição é que, em cada jogada, só podem ser retirados palitos de um único grupo numa quantidade mínima de um palito e máxima de todos os palitos do grupo escolhido. Os jogadores jogam se alternando, e quem retirar os últimos palitos vence.

Com o intuito de analisarmos a estratégia vencedora, que o matemático Charles L. Bouton desenvolveu para o jogo, apresentaremos a seguir a soma-Nim, que é parte fundamental da teoria matemática que baseia esta estratégia.

[2] Artigo intitulado como: *Nim, a game with a complete mathematical theory*. Em tradução livre: Nim, um jogo com uma teoria matemática completa.

3.1 A soma-Nim

Definição: A soma-Nim, de símbolo $\oplus$, é uma operação matemática feita com os números naturais escritos na base binária e organizados um embaixo do outro com seus algarismos alinhados à direita (como em uma soma comum de base 10), em cada uma das colunas, formadas pelos algarismos, se a quantidade de algarismos "1" for par (inclusive zero), o resultado da soma naquela coluna em questão será 0 (zero). Caso contrário, será 1 (um).

Como exemplo, vamos efetuar uma soma-Nim com os números 18, 22, 8 e 6, que estão todos escritos na base 10. O primeiro passo é passar esses números da base 10 para a base 2, como segue:

$$18 = (10010)_2,\ 22 = (10110)_2,\ 8 = (1000)_2 \text{ e } 6 = (110)_2.$$

E teremos:

$$\begin{array}{cr} & 10010 \\ & 10110 \\ \oplus & 1000 \\ & 110 \\ \hline & 01010 \end{array}$$

Portanto:

$$10010 \oplus 10110 \oplus 1000 \oplus 110 = 01010$$

É importante ter clareza de que a soma-Nim não é uma soma usual. Ao efetuar $18 + 22 + 8 + 6$, encontramos como resultado o número 54, que na base binária, equivale ao número 110110.

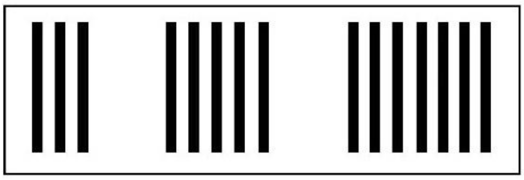
3.2 A teoria de Bouton para a estratégia vencedora

A teoria de Bouton para a estratégia vencedora consiste no fato de que, se um determinado jogador, digamos A, consegue deixar uma certa configuração de palitos na mesa e, depois disso, joga sem cometer erros, o outro jogador, digamos B, não consegue ganhar. Esta configuração vencedora é chamada de combinação segura. Bouton ainda demonstra que, se A deixar uma combinação segura, B, em sua próxima jogada, não conseguirá deixar uma combinação segura. E mais, independente do que B faça, A sempre conseguirá deixar uma combinação segura na mesa, na sua jogada subsequente. Uma configuração que não for uma combinação segura chamaremos de combinação não segura.

O conceito matemático presente na teoria de Bouton para formar uma combinação segura trata da aritmética dos números naturais escritos na base binária. Mais precisamente da soma-Nim. Uma combinação segura é aquela em que a soma-Nim dos números que representam as quantidades de palitos em cada grupo vale zero.

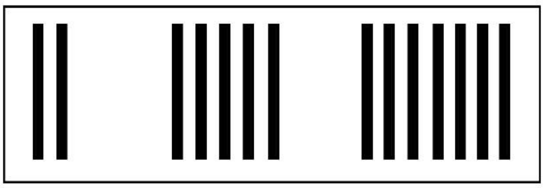
Para entendermos melhor como essa estratégia vencedora baseada na teoria de Bouton funciona, vamos acompanhar o exemplo a seguir em que temos três grupos de palitos: o primeiro com três palitos, o segundo com cinco e o terceiro com sete. Os jogadores são A e B e o jogador A é quem jogará utilizando a estratégia vencedora.

Configuração inicial do jogo:



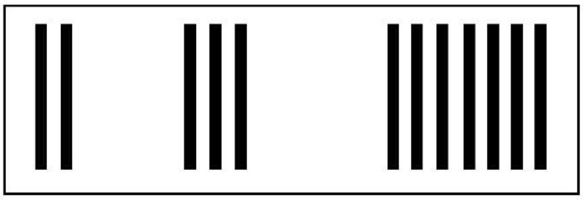
Grupos	**Quant. de palitos**	**Núm. na base 2**
1º	3	011
2º	5	101
3º	7	111
Soma-Nim		**001**

O jogador A começa o jogo e retira do 1º grupo um palito, deixando a soma-Nim igual a zero, ou seja, ele forma o que chamamos de uma combinação segura:



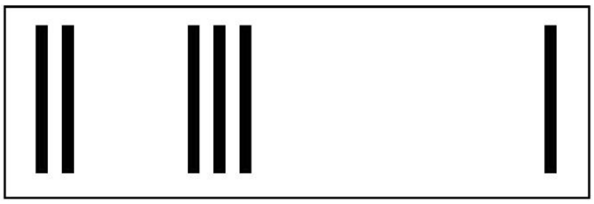
Grupos	**Quant. de palitos**	**Núm. na base 2**
1º	2	010
2º	5	101
3º	7	111
Soma-Nim		**000**

Quem joga agora é B. Perceba que não há retirada permitida nas regras do jogo que possibilite a B deixar na mesa uma combinação segura. Você pode fazer isso nesse momento, por exaustão, verificando, em cada grupo, todas as retiradas possíveis. Como exemplo, vamos supor que B retire dois palitos do 2º grupo e a nova configuração obtida, que não é mais uma combinação segura, está representada na figura 6.



Grupos	Quant. de palitos	Núm. na base 2
1º	2	010
2º	3	011
3º	7	111
Soma-Nim		**110**

O jogador A volta a jogar e retira do 3º grupo seis palitos e, dessa forma, volta para a combinação segura:

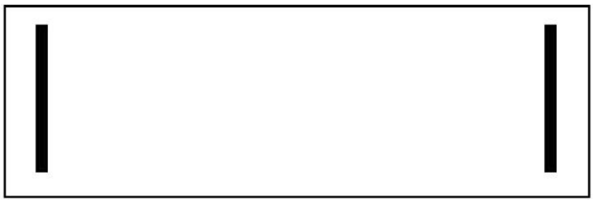


Grupos	Quant. de palitos	Núm. na base 2
1º	2	10
2º	3	11
3º	1	01
Soma-Nim		**00**

B joga novamente e, por exemplo, retira os três palitos do 2º grupo. Novamente aqui você pode verificar que nenhuma jogada de B, torna a configuração uma combinação segura.

Grupos	Quant. de palitos	Núm. na base 2
1º	2	10
2º	0	00
3º	1	01
Soma-Nim		**11**

Em sua próxima jogada, o jogador A volta para uma combinação segura retirando um palito do 1º grupo:



Grupos	Quant. de palitos	Núm. na base 2
1º	1	1
2º	0	0
3º	1	1
Soma-Nim		**0**

O próximo a jogar é B e não lhe resta outra alternativa a não ser retirar um único palito de qualquer grupo que seja, deixando assim, o último palito para A retirar e, desta forma, A ganha.

Se A não fosse o primeiro a jogar e, levando em consideração que B não sabe a estratégia para vencer, o jogador A deveria, a partir das jogadas de B, esperar a oportunidade de uma combinação não segura para transformá-la em segura e seguir com a estratégia até a vitória.

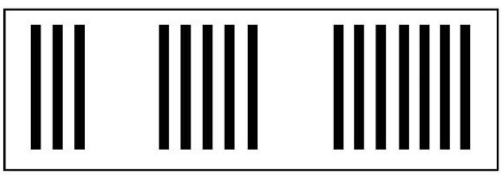
3.3 Um novo olhar sobre a estratégia vencedora

Para utilizarmos a estratégia vencedora durante uma partida do Nim é necessário efetuarmos cálculos mentais tanto para passarmos os números de uma base para outra, quanto para chegarmos ao resultado da soma-Nim. E é interessante que esses cálculos sejam feitos em tempo hábil para não “travar” o jogo. Isto pode não ser um problema para algumas pessoas, mas nem todos possuem tamanha habilidade. Uma outra alternativa seria jogar fazendo uso de papel e caneta, mas, desta forma, ficaria claro para o oponente que uma estratégia pré-determinada estaria sendo utilizada. Nestas duas possibilidades, podemos enxergar desvantagens, e esta foi a motivação que tivemos para buscar uma terceira alternativa para jogar o Nim, utilizando a estratégia vencedora.

Ao efetuarmos uma soma-Nim, organizando os números que estão na base binária, um embaixo do outro e alinhados à direita, sabemos que, em cada coluna, os algarismos precisam ser todos iguais a zero, ou possuir uma quantidade par de algarismos iguais a 1 para que a soma-Nim seja nula. Sabemos também que cada coluna é referente a uma determinada potência de base 2. Portanto, se uma coluna só possui algarismos iguais a zero significa que, em nenhum daqueles números, a potência de base 2 referente àquela coluna compõe o número. Se, em uma determinada coluna, existe uma quantidade par de algarismos iguais a 1 significa que a potência de base 2 referente àquela coluna compõe uma quantidade par de números, ou seja, aparece uma quantidade par de vezes, quando olhamos juntas todas as potências que compõem os números em questão.

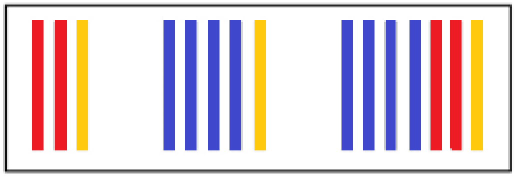
Dessa forma, quando olhamos para a configuração de palitos na mesa, e conseguimos enxergar os palitos pertencentes a cada grupo “separados” em potências de base 2, é possível perceber quais potências estão em quantidades ímpares e quais estão em quantidades pares. E o que iremos buscar com nossa jogada é que cada potência de base 2 apareça uma quantidade par de vezes ou simplesmente não apareça. Conseguindo isso, formamos uma combinação segura.

Para entendermos melhor esta nova forma de jogar, vamos retomar o exemplo utilizado na seção 3.3, onde temos um jogo do Nim com configuração inicial igual a (3, 5, 7).



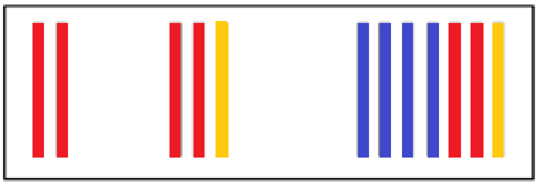
Vamos enxergar cada grupo de palitos como somas de potências de base 2, onde cada potência só aparece uma única vez dentro de cada grupo. O primeiro grupo possui três palitos e $3 = 2^1 + 2^0 = 2 + 1$. No segundo grupo, teremos $5 = 2^2 + 2^0 = 4 + 1$. E no terceiro, $7 = 2^2 + 2^1 + 2^0 = 4 + 2 + 1$.

A ideia é enxergar essa configuração da seguinte forma:



Na imagem acima destacamos as potências $2^2 = 4$ com a cor azul, $2^1 = 2$ com a cor vermelha e $2^0 = 1$ com a cor amarela. Não teremos esta distinção de cores na hora do jogo, mas iremos precisar imaginar as potências assim destacadas. Dessa forma, fica fácil perceber que, na configuração do jogo, a potência 2^0 aparece em quantidade ímpar, enquanto as potências 2^2 e 2^1 aparecem, cada uma, em quantidades pares. Logo, precisamos retirar uma potência 2^0 de um dos grupos, ou seja, para garantir a combinação segura basta retirar um único palito de qualquer um dos três grupos.

Foi isto que, no exemplo da seção 3.3, o jogador A fez, retirou um palito do primeiro grupo e conseguiu a combinação segura. Em seguida, o jogador B faz sua jogada, retira 3 palitos do segundo grupo e deixa na mesa uma configuração (2, 3, 7). Devemos enxergar essa configuração da forma a seguir:



Nesta nova configuração, apenas a potência 2^0 está em quantidade par. As potências 2^2 e 2^1 estão em quantidades ímpares e precisamos retirar uma de cada. Como, pela regra do jogo, só podemos retirar palitos de um único grupo, iremos retirar estas duas potências do grupo três, sendo esta a única jogada possível para alcançar a combinação segura neste momento do jogo. Foi isso que o jogador A fez, retirou seis palitos do grupo três e, portanto, a configuração ficou (2,3,1).

B joga novamente e retira os 3 palitos do segundo grupo deixando a configuração (2, 0, 1). Que segue:

As duas potências estão em quantidades ímpares, mas podemos transformar 2^1 em 2^0, retirando um palito do primeiro grupo e, assim, ficando com duas potências 2^0.

Note que, se o jogador A sempre equilibrar as potências em quantidades pares, no final do jogo, teremos apenas dois grupos com quantidades iguais de palitos. E a partir disso, a cada jogada de B, basta que A retire a mesma quantidade de palitos que B retirou, só que no outro grupo. Seguindo assim, a última jogada será de A.

Vamos supor que após uma das jogadas de A, a configuração na mesa seja (4, 4, 0), que é uma combinação segura. Se B retirar os quatro palitos de um dos grupos, A irá retirar os quatro palitos do outro grupo e vencer. Se B retirar apenas um palito de um dos grupos, A irá retirar apenas um palito do outro grupo e o jogo continuará desta maneira até que A vença.

É natural que, durante uma partida do Nim, os jogadores, mesmo sem conhecerem a estratégia vencedora, percebam que deixar dois grupos com a mesma quantidade de palitos no final do jogo garante-lhes a vitória. Desta forma, quem consegue este feito primeiro, ganha. O que a estratégia vencedora garante é que, independentemente do que o seu adversário faça, é você quem conseguirá deixar os dois grupos com a mesma quantidade de palitos no final da partida.

4 Atividades Propostas

Esta seção apresenta as três atividades que foram elaboradas para serem aplicadas em turmas de nono ano. Entretanto, a primeira delas tem como pré-requisito apenas o conhecimento dos números naturais escritos na base decimal e as potências de bases e expoentes naturais e as demais têm como pré-requisito a primeira atividade e, sendo assim, elas podem ser aplicadas em qualquer turma do Fundamental II e Ensino Médio.

Essas atividades têm como intuito apresentar aos alunos o sistema de numeração binário, realizar cálculos de mudança de base e, ao final, levá-los a jogar o Nim utilizando a estratégia vencedora desenvolvida por Bouton.

4.1 Atividade 1 - Os Cartões Mágicos Binários

Duração: 50min.
Objetivo: chegar ao conceito de sistema de numeração binário.
Pré-requisitos: sistema de numeração decimal, potências de bases e expoentes naturais.
Material necessário: cartões mágicos binários (para uso da professora), folha de atividades, lápis e borracha.
Organização da classe: turma disposta em duplas para que haja discussão de ideias e comparação de resultados.
Metodologia: a "mágica" será utilizada como um atrativo, a professora iniciará a aula fazendo a "mágica" para que os alunos se interessem em descobrir por que ela funciona. Depois que a professora realizar a "mágica" algumas vezes, os alunos receberão uma folha de atividades como segue:

Escola: _______________________________ Data:___/___/___
Estudante: ____________________________ Turma:_______

Atividade 1: Os Cartões Mágicos Binários

A mágica feita com os cartões mágicos binários é muito intrigante e divertida. Ela funciona assim: pede-se para que uma pessoa pense em um número de 1 a 63, em seguida, são apresentados 6 cartões com 32 números em cada. Esta pessoa deve dizer em quais destes cartões o número que ela pensou aparece. Feito isso, o “mágico” em questão poderá adivinhar o número pensado. Vamos tentar desvendar o segredo dessa mágica?

a) Escolha um número de 1 a 63.

b) Marque o número que você escolheu em todos os cartões abaixo em que ele aparece.

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

c) Levando em consideração o primeiro número de cada cartão como seu representante, complete a tabela 1, escrevendo “sim” para os cartões em que o número que você escolheu aparece e “não” para os cartões em que ele não aparece.

32	16	8	4	2	1

Tabela 1

d) Efetue uma adição com todos os números da tabela 1 em que você escreveu "sim". O que você pode notar? Converse com seus colegas sobre os valores que eles encontraram para essa soma.

e) Você conseguiu desvendar qual o segredo por trás da mágica dos cartões? Se sim, explique-o.

f) O que os números 32, 16, 8, 4, 2 e 1 possuem em comum?

g) Qual seria o próximo número da sequência 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...?

h) Complete a Tabela 2 com as potências de base 2 que têm como resultado os números a seguir:

	32
	16
	8
	4
	2
	1

Tabela 2

i) Utilize os dados da tabela 1 para preencher a tabela 3 a seguir. Escreva cada número da primeira linha em seu formato de potência. Troque o "sim" pelo número 1, indicando que aquela potência aparece uma vez, troque o "não" pelo 0, indicando que aquela potência não aparece nenhuma vez.

Tabela 3

j) No Sistema Numérico Decimal, que é o sistema que estamos habituados a utilizar, quando escrevemos os números como soma de potências de base 10, os coeficientes de cada potência são os algarismos que compõem o número. Observe o exemplo:

$$2034 = 2.1000 + 0.100 + 3.10 + 4 = \boxed{2.}10^3 + \boxed{0.}10^2 + \boxed{3.}10^1 + \boxed{4.}10^0$$

k) Da mesma forma, podemos escrever os números como soma de potências de uma base qualquer. Utilizando a tabela 3 como referência, escreva o número que você escolheu como soma de potências de base 2.

Os coeficientes de cada potência de base 2 são os algarismos que compõem esse número se escrito em um sistema numérico que se baseia nas potências de base 2. Este sistema existe e recebe o nome de Sistema Numérico Binário. Portanto, a sequência de 1 e 0 que aparece na segunda linha da tabela 3 é como se escreve o número que você escolheu utilizando o Sistema Numérico Binário. No sistema decimal, que possui base 10, utilizamos 10 algarismos, enquanto que no sistema binário, de base 2, só são necessários 2 algarismos, que são o 1(um) e o 0(zero). Para diferenciar um número que está escrito na base 2 de um número que está na base 10, podemos usar a notação: $65 = (1000001)_2$ indicando que o número 65 (base 10) escrito na base 2 é igual a 1000001, por exemplo.

l) Complete com o número que você escolheu:

$$\_\_\_\_\_ = (\_\_\_\_\_\_\_\_)_2$$

Para a apresentação da atividade dos cartões mágicos binários temos uma sugestão digital que contempla números de 1 a 30. Desenvolvida por Carlos Amorim[3] com programação em PowerPoint e disponível no link[4], esta versão possibilita que até três jogadores participem ao mesmo tempo e portanto, o "mágico" descobre simultaneamente os 3 resultados dando dinamismo ao processo. Para utilizar esta versão,

- Faça download no arquivo "Jogo Cartelas Mágicas" disponível no link,

[3]Mestrando PROFMAT – PUC-RJ, turma 2018.
[4]Link: https://drive.google.com/open?id=1EDt0wkOeAjbT_2aq6_bWazOPm8iy8c3r

- Inicie a apresentação de slides,
- Clique em "próximo", para cada cartela,
- Marque, a cada tabela, os jogadores que afirmarem estarem vendo o número pensado e,
- No último slide (que sugerimos não ser mostrado a plateia) clique em "resultado" e os números pensados serão revelados.

4.2 Atividade 2 - A Mensagem Secreta

A atividade proposta a seguir foi retirada e adaptada de (BELL; FELLOWS; WITTEN, 2011).

Duração: 1h e 40min.
Objetivo: exercitar os conceitos trabalhados na atividade anterior, realizar cálculos de mudança de base.
Pré-requisitos: sistema de numeração decimal, potências de bases e expoentes naturais, sistema de numeração binário.
Material necessário: folha de atividades, lápis e borracha.
Organização da classe: turma disposta em duplas para que haja discussão de ideias e comparação de resultados.
Metodologia: será apresentado para os alunos um texto contando uma pequena história sobre uma pessoa em apuros que precisa enviar uma mensagem secreta e, para tanto, utiliza os números em sua forma binária. Ao realizar a atividade, a mensagem secreta será desvendada.

A seguir, acompanhe a atividade:

Escola: ______________________________ Data:___/___/___
Estudante: ___________________________ Turma:_______

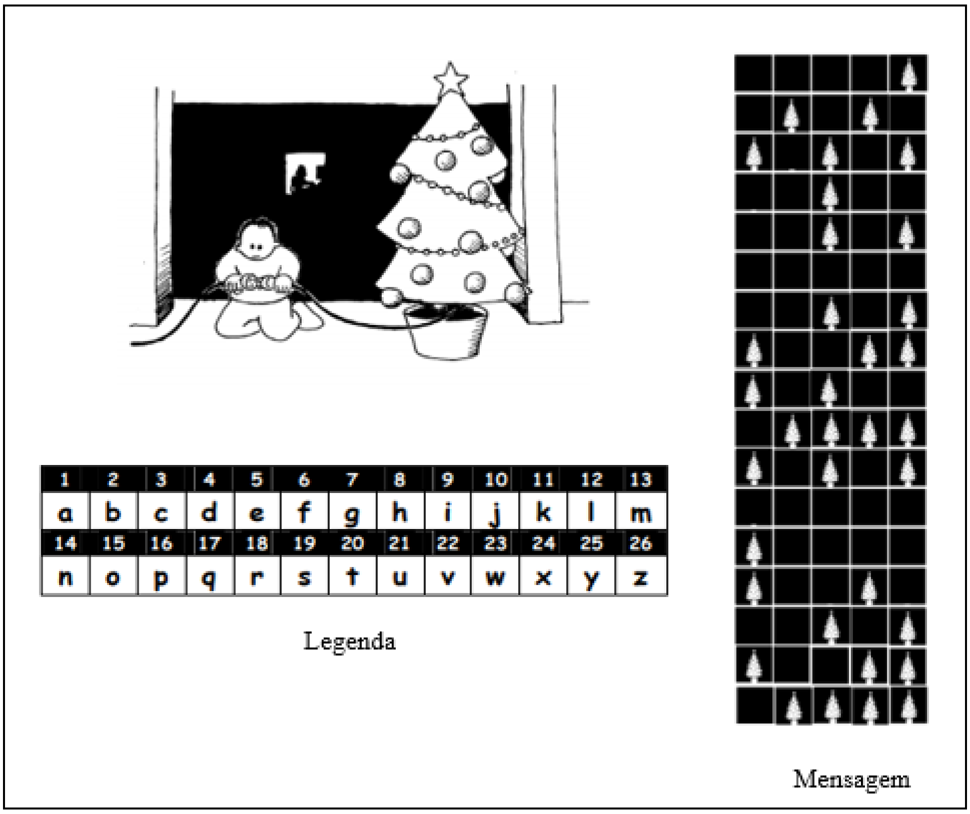
Atividade 2 – A mensagem Secreta

Texto:

“João está preso no último andar de uma loja. É noite de Natal e ele quer ir para casa com seus presentes. O que ele pode fazer? Tentou chamar alguém, até mesmo gritar, mas não há ninguém por perto e seu celular está sem bateria. Do outro lado da rua, ele pode ver uma mulher ainda trabalhando em seu computador. Como poderia atrair sua atenção? João olha em volta para ver o que poderia usar. Então, ele tem uma brilhante ideia: utilizar as lâmpadas da árvore de Natal para enviar uma mensagem! Coletou todas as lâmpadas disponíveis, as conectou aos bocais de forma que pudesse acendê-las ou apagá-las e organizou-as em um retângulo com 17 linhas e 4 colunas. João usou um código simples, que ele sabia ser de conhecimento da mulher do outro lado da rua. ”

Na mensagem secreta de João, cada linha representa um número que está associado a uma letra do alfabeto. Para descobrir que número representa cada linha, precisamos desvendar qual o código utilizado por João para escrever sua mensagem.

As linhas que não possuem lâmpadas acessas representam espaço entre palavras.



A mensagem secreta de João.

Fonte:https://classic.csunplugged.org/wp-content/uploads/2014/12/CSUnpluggedTeachers-portuguese-brazil-feb-2011.pdf. Adaptada.

a) Qual foi o código utilizado por João para escrever sua mensagem secreta? Discuta com seus colegas.

b) Na mensagem secreta, o símbolo de lâmpada  representa qual algarismo? E o espaço vazio?

Você deve ter percebido que o código utilizado por João foi a base binária, onde o símbolo de lâmpada  representa o algarismo 1 e o espaço vazio representa o algarismo 0. Dessa forma, em cada linha da mensagem secreta temos um número escrito na base 2. Se conseguirmos converter esses números para a base decimal e utilizarmos a legenda será possível descobrir qual a mensagem secreta de João.

c) Na tabela a seguir, reescreva a mensagem secreta de João trocando o símbolo de lâmpada  pelo algarismo 1 e o espaço vazio pelo algarismo 0. Complete a tabela e a mensagem secreta de João será desvendada. As duas primeiras linhas já estão resolvidas como exemplo.

Potências de base 2							
2^4	2^3	2^2	2^1	2^0			
Mensagem Secreta (Base 2)					Soma das potências	Base 10	Letra
0	0	0	0	1	2^0	1	a
0	1	0	1	0	$2^3 + 2^1$	10	j

d) Nem todos os números de 1 a 26 foram utilizados por Tom para escrever sua mensagem. Complete a tabela a seguir com os números na base decimal que não foram utilizados por Tom e, em seguida, complete a tabela para escrevê-los na base binária. Algumas linhas estão resolvidas como exemplo.

	Potências de base 2					
Número na base 10	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	Número na base 2
2	0	0	0	1	0	10
3	0	0	0	1	1	11
26	1	1	0	1	0	11010

e) Utilizando o mesmo código que João, escreva uma mensagem secreta e troque pela do seu colega ao lado para que ambos decodifiquem a mensagem um do outro.

4.3 Atividade 3 - O Nim

A atividade sobre o Nim trata-se de uma aplicação dos números binários como método matemático para a construção de uma estratégia vencedora para o jogo. Para esta atividade, espera-se que os alunos já estejam familiarizados com os números binários, assim como com a mudança de base de um número decimal para um número binário e vice-versa.

Duração: 1h e 40min.
Objetivo: jogar o Nim utilizando a estratégia vencedora.
Pré-requisitos: sistema de numeração decimal, potências de bases e expoentes naturais, sistema de numeração binário.
Material necessário: o jogo Nim composto de 15 palitos, folha de atividades, lápis e borracha.
Organização da classe: turma disposta em duplas para o jogo e também para que haja discussão de ideias e comparação de resultados.
Metodologia: com a turma dividida em duplas, a professora apresenta o jogo e suas regras. A configuração inicial que vai ser utilizada é (3,5,7). A professora deixa as duplas jogarem por um tempo para que se familiarizem com o jogo. Em seguida, ela desafia alguns alunos para jogar e mostra para a turma que é possível sempre ganhar. Os alunos receberão algumas questões como segue:

Escola: ________________________________ Data:___/___/___
Estudante: ____________________________ Turma:_______

Atividade 3: O Nim

O Nim é um jogo de regras simples e de fácil entendimento feito para duas pessoas jogarem. São dispostos em uma mesa grupos de um determinado objeto, digamos palitos. A quantidade de grupos, e de palitos em cada grupo, é arbitrária. A jogada é feita da seguinte maneira: o jogador escolhe um dos grupos e retira dele a quantidade de palitos que desejar. O principal é que, em cada jogada, só podem ser retirados palitos de um único grupo numa quantidade mínima de 1 palito e máxima de todos, ou seja, é possível retirar todos os palitos de um grupo. Os jogadores jogam se alternando e o último que tiver palitos para retirar, vence.

Você recebeu 15 palitos, separe-os em três grupos: um com três palitos, um com cinco e o último com sete. Junte-se com um colega e vamos jogar!

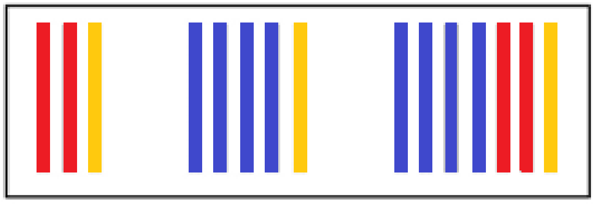
a) Enquanto jogava o Nim, você utilizou alguma estratégia para vencer? Se sim, explique-a.

b) Se na mesa tivessem apenas dois grupos com a mesma quantidade de palitos em cada, você preferiria ser o primeiro ou o segundo a jogar? Por quê?

c) Imagine que na mesa tenha apenas dois grupos, um com três palitos e outro com 2. Sendo sua vez de jogar, qual seria a sua jogada para garantir a vitória? Por quê?

Em um jogo de estratégia, uma combinação segura é uma jogada que nos garante a vitória independentemente do que o adversário faça. Quando só temos 2 grupos de palitos na mesa, deixar os dois grupos com a mesma quantidade de palitos é uma combinação segura.

No ano de 1902 um matemático chamado Charles L. Bouton criou uma estratégia que garante a vitória no Nim para qualquer quantidade de grupos de palitos. Para entendermos essa estratégia vamos enxergar o número de palitos em cada grupo como somas de potências de base 2. Observe:



Sem que o outro jogador perceba, precisamos enxergar cada grupo desta forma: $3 = 2 + 1, 5 = 4 + 1$ e $7 = 4 + 2 + 1$. Agora, olhando para toda a configuração da mesa é necessário, para ter uma combinação segura, que cada potência apareça uma quantidade par de vezes (neste caso, duas vezes ou nenhuma vez). Como a potência $2^0 = 1$ aparece três vezes precisamos retirar um palito de qualquer um dos três grupos e, fazendo isto, teremos uma combinação segura. Se continuarmos a jogar desta maneira, no final do jogo sobrarão apenas dois grupos com quantidades iguais de palitos na vez do outro jogador, e já vimos que isto nos garante a vitória.

d) Jogue novamente algumas partidas do Nim, alternando com seu colega quem usará a estratégia vencedora.

e) Sendo o segundo a jogar, é possível usar a estratégia vencedora? Explique.

f) Escolha três números que formem uma combinação segura no Nim.

g) Passe esses três números para a base binária.

Número na base 10	2^2	2^1	2^0	Número na base 2

h) Leia definição a seguir:

“A soma-Nim, de símbolo $\oplus$, é uma operação matemática feita com os números naturais escritos na base binária e organizados um embaixo do outro com seus algarismos alinhados à direita (como em uma soma comum de base 10), em cada coluna, formadas pelos algarismos, se a quantidade de algarismos “1” for par (inclusive zero), o resultado da soma naquela coluna em questão será 0 (zero). Caso contrário, será 1 (um). ”

Complete a tabela abaixo utilizando os números escolhidos no item “f” e, em seguida, calcule sua soma-Nim.

Grupos	Quant. de palitos	Núm. na base 2
1º		
2º		
3º		
soma-Nim $\oplus$		

i) Qual o resultado da sua soma-Nim? Compare com o resultado de seus colegas.

A operação matemática soma-Nim foi desenvolvida pelo matemático Charles L. Bouton. A estratégia vencedora de Bouton consiste do fato de que, para formar uma combinação segura que te garante a vitória, a soma-Nim das quantidades de palitos de cada grupo precisa ser igual a zero.

5 Gabarito

Atividade 1 - Os Cartões Mágicos Binários

a) A resposta é pessoal, o aluno pode escolher qualquer número de 1 a 63. Para dar seguimento ao gabarito usaremos como exemplo de resposta o número 24.

b) Usando o número 24 como exemplo, os cartões marcados seriam aqueles em que se iniciam com os números: 16 e 8.

c) Seguindo usando o número 24 como exemplo, a tabela ficará assim:

32	16	8	4	2	1
não	sim	sim	não	não	não

Tabela 1

d) 16+8 = 24. Ao somar os números encontramos como resultado o número escolhido.

e) É desejável que o aluno responda que sim e explique que o truque se baseia em somar o primeiro número de cada cartão que o número escolhido aparece.

f) É desejável que o aluno responda que todos os números são resultados de potências de base 2, mas outras respostas também podem estar corretas.

g) 64

h)

2^5	32
2^4	16
2^3	8
2^2	4
2^1	2
2^0	1

Tabela 2

i) Seguindo com o número 24 como exemplo:

2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
0	1	1	0	0	0

Tabela 3

j) Não tem o que ser respondido.

k) $24 = 0.2^5 + 1.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0$

l) Como o algarismo 0 no início do número não é significativo, temos:

$24 = (11000)_2$

Atividade 2 - A Mensagem Secreta

a) O código utilizado foram os números escritos na base binária.

b) Lâmpada = 1, espaço vazio = 0.

c)

Potências de base 2							
2^4	2^3	2^2	2^1	2^0			
Mensagem Secreta (Base 2)					Soma das potências	Base 10	Letra
0	0	0	0	1	2^0	1	A
0	1	0	1	0	$2^3 + 2^1$	10	J
1	0	1	0	1	$2^4 + 2^2 + 2^0$	21	U
0	0	1	0	0	2^2	4	D
0	0	1	0	1	$2^2 + 2^0$	5	E
0	0	1	0	1	$2^2 + 2^0$	5	E
1	0	0	1	1	$2^4 + 2^1 + 2^0$	19	S
1	0	1	0	0	$2^4 + 2^2$	20	T
0	1	1	1	1	$2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$	15	O
1	0	1	0	1	$2^4 + 2^2 + 2^0$	21	U
1	0	0	0	0	2^4	16	P
1	0	0	1	0	$2^4 + 2^1$	18	R
0	0	1	0	1	2^0	5	E
1	0	0	1	1	$2^4 + 2^1 + 2^0$	19	S
0	1	1	1	1	$2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$	15	O

d)

	Potências de base 2					
Número na base 10	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	Número na base 2
2	0	0	0	1	0	10
3	0	0	0	1	1	11
6	0	0	1	1	0	110
7	0	0	1	1	1	111
8	0	1	0	0	0	1000
9	0	1	0	0	1	1001
11	0	1	0	1	1	1011
12	0	1	1	0	0	1100
13	0	1	1	0	1	1101
14	0	1	1	1	0	1110
17	1	0	0	0	1	10001
22	1	0	1	1	0	10110
23	1	0	1	1	1	10111
24	1	1	0	0	0	11000
25	1	1	0	0	1	11001
26	1	1	0	1	0	11010

e) Resposta pessoal.

Atividade 3 - O Nim

a) Resposta pessoal.
b) É desejável que o aluno responda que gostaria de ser o segundo a jogar para imitar as jogadas do oponente e, dessa forma, ser o último a jogar.
c) É desejável que o aluno responda que retiraria um palito do grupo com três palitos para deixar o oponente com dois grupos iguais de palitos.
d) __
e) Sim, basta esperar por uma combinação não seguira para transformá-la em segura.

f) Resposta pessoal. Algumas possibilidades: (2,6,4), (5,4,1) e (2, 5, 7).

g) Usaremos como exemplo a combinação 2, 6 e 4.

Número na base 10	2^2	2^1	2^0	Número na base 2
2	0	1	0	10
6	1	1	0	110
4	1	0	0	100

h)

Grupos	Quant. de palitos	Núm. na base 2
1º	2	10
2º	6	110
3º	4	100
soma-Nim $\oplus$		000

i) O resultado foi zero.

6 Referências Bibliográficas

ALMEIDA, B. I.; CARVALHO, R. B. **A matemática do jogo do nim em uma abordagem investigativa.** 79 f. Monografia (Licenciatura em Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense. Campos dos Goytacazes-RJ, 2016.

BELL, TIM; FELLOWS, MIKE; WITTEN, IAN H. **Computer Science Unplugged: Ensinando Ciência da Computação sem o uso do computador**. 2011. Disponível em: https://classic.csunplugged.org/wp-content/uploads/2014/12/CSUnpluggedTeachers-portuguese-brazil-feb-2011.pdf. Acesso em: 01/02/2020.

BOUTON, C. L. **“Nim, A Game with A Complete Mathematical Theory”**, Annals of Mathematics. Princeton, 1902. 35-39.

GARDNER, M. **Divertimentos Matemáticos**. São Paulo: Ibrasa, 1961.

MENDES, H. L. **Números binários em livros didáticos de matemática e de computação: uma comparação. Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v.11, n. 1, 2018. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/5801>. Acesso em: 31/01/2020.

STEFFENON, R.; GUARNIERI, F. **Belos Problemas de Matemática: Indução e contagem**. Sociedade Brasileira de Matemática. 2016.