PRODUTO EDUCACIONAL

DISCUNTINDO A CONTROVÉRSIA
ZERO ELEVADO A ZERO
NO ENSINO BÁSICO

Carlos José Amorim da Silva

PROFMAT PUC-Rio

AGO/2020

Índice

Anexo:

Apresentação “zero elevado a zero” em *Portable Document Format* (PDF).

1 Introdução

Este produto educacional é resultante da dissertação de mestrado do autor, discente do PROFMAT na PUC-Rio, com título “A expressão zero elevado a zero”, concluído em agosto de 2020.

O propósito do presente produto é oferecer um texto de apoio que inclui uma proposta de aplicação em projeto interdisciplinar com a disciplina de português, um plano de aula para abordagem do tema no ensino básico e atividades que proporcionem aos professores deste nível de escolaridade discutir a controvérsia que envolve a expressão zero elevado a zero. Sugerimos que o conteúdo deste projeto seja aplicado de forma concomitante com a apresentação das regras de potenciação.

O texto para o projeto interdisciplinar, apresentado no capítulo 2, permite também trabalhar conteúdos afetos à disciplina de português tais como a análise e interpretação de texto. Cabe ressaltar que o texto não apresenta uma solução para a expressão zero elevado a zero, tema que será discutido com o professor de matemática.

O plano de aula, apresentado no capitulo 3, propõe uma sugestão de roteiro para a abordagem da expressão zero elevado a zero e sua controvérsia. O professor pode selecionar as atividades conforme as habilidades de cada turma ou mesmo incluir outras como por exemplo pedir para seus alunos calculem o valor da expressão em seus celulares ou calculadoras permitindo discussões e reflexões diversas. Possibilitando também o desenvolvimento de propostas com outros conteúdos da matemática básica tais como cálculos estatísticos básicos, probabilidades, operações com inteiros e decimais.

Os capítulos 4, 5 e 6 expõem às abordagens numérica, gráfica e pelo binômio de Newton para a expressão zero elevado a zero.

Os capítulos 7, 8 e 9 apresentam as soluções utilizadas pelos softwares Geogebra, Photomath, Mathway e celulares para a expressão zero elevado a zero.

As três atividades apresentadas nos capítulos 10, 11 e 12 inferem, de forma lúdica, que a expressão zero elevado a zero possui valor unitário e permitem trabalhos interessantes no chão da sala de aula, inclusive com propostas práticas e interdisciplinares.

Espera-se que este produto educacional permita aos professores subsídios para exporem com seus alunos os detalhes da expressão zero elevado a zero, constatando que o valor desta operação aritmética não tem resposta única.

2 Texto para projeto interdisciplinar

O texto apresentado neste capítulo para aplicação do projeto interdisciplinar foi elaborado utilizando como base em um texto que foi acessado em 15 de novembro de 2004 no endereço <http://pense_bem.blig.ig.com.br/> e que atualmente encontra-se desativado. A figura inserida no texto foi elaborada através da manipulação de outras encontradas na internet, cujas fontes criadoras são desconhecidas. O texto apresenta linguagem coloquial com a finalidade de estimular a curiosidade dos alunos e propiciar o enfoque lúdico do assunto.

Nada: A fronteira Inicial

O professor de história acabou de entrar em sala, faltam alguns minutos para começar a aula, temos ainda um tempo de estudo para o simulado de hoje e o colega do lado pergunta:

- Ei! Quanto será que é zero elevado a zero?

- É claro que é um. Como sempre, a regra diz que todo número elevado à zero é igual a um.

- Tem certeza?

Minutos de pensamento são colocados no ar, e logo surge uma revelação:

- É complicado te falar se estou certo ou não.

Logo se formou um grupo, todo aquele pessoal que estava junto não sabia o que responder. Muitos afirmavam que era zero, e outros já diziam que era um. E eu tinha a ideia fixa na cabeça: esse resultado era impossível!

Ninguém chegava num acordo. Alguns puxavam os seus cabelos, outros estavam com fumaça saindo da cabeça muito tempo antes mesmo de começar o simulado.

O professor de história disse que era zero, mas alguns achavam estranho este valor.

Coisa de matemático insano ou de estudante perdido do ensino médio. A vontade de querer saber todas as respostas tentava absorver este enigma tão intrigante.

- É impossível nada elevado a nada dar alguma coisa! - Já dizia a menina que irá sentar do meu lado no simulado.

- Mas a regra é clara! - Dizia outro garoto que nem sei se fará o simulado.

- Não está entrando em minha cabeça. É claro que toda regra pode ter uma exceção, afirmavam alguns dos estudantes daquela reunião.

- Tá dose responder essa pergunta...

A discussão continuou por minutos, até que foi dada a chamada para a aula.

Imagine se essa questão caísse no ENEM: o coitado do INEP teria que pagar indenização por responder perguntas que ainda não são muito compreendidas pelos cálculos matemáticos.

Imagino que muitos matemáticos devem ter dificuldades para resolver este mistério:

- Ah é!? E quanto é zero elevado a zero?

Você saberia responder esta questão sem confusão? Eu sim, e de uma maneira bem lógica. Só basta se lembrar da regra que está implícita em qualquer número elevado a zero. Mas não vou falar, só deixar que você possa responder essa questão ainda pouco compreendida pelos estudantes de ensino básico e escondida pelos matemáticos que adoram calcular.

3 Plano de aula

	PLANO DE AULA		
DISCIPLINA: MATEMÁTICA	**TÍTULO: A expressão 0^0.**	**U.E. 1.0**	**AULA 1.1**
Professor(a):		**TURMA:**	

INTRODUÇÃO: **Qual o significado da expressão 0^0? A expressão 0^0 é uma controvérsia matemática, pois raciocínios lógicos e válidos conduzem a resultados diferentes.**

RESUMO DA AULA ANTERIOR: **As principais regras e propriedades da potenciação.**

TÓPICO(S): **Abordagens: numérica, gráfica, por binômio de Newton, por calculadoras de celulares e softwares Geogebra, Photomath e Mathway (podem ser utilizados outros programas tais como MATLAB e Maple).**
Atividades/questões para atribuir significado ao 0^0.

OBJETIVOS: **- Atribuir significado a expressão 0º.**
- Citar os possíveis resultados adotados para a expressão 0º.

INCENTIVAÇÃO: **Persuasão oral. A pergunta parecer simples, porém é controversa. Encontram-se respostas diversas mesmo entre os professores de matemática.**

ROTEIRO DA AULA: Valendo-se da Técnica de Exposição Oral, os seguintes tópicos deverão ser abordados:

Qual o significado ou valor da expressão 0^0? (pergunta central da atividade).

As regras usuais para potências de base "0" e expoente "0":
a) $0^n = 0$, se $n > 0$.
b) $a^\circ = 1$, $a \neq 0$.
Não respondem qual o valor de 0º.

Apresentar as possibilidades usuais de resposta, certas ou erradas, para a pergunta: Vale zero ou um? Indeterminado? Expressão sem significado matemático!

Dividir a turma em grupos para pesquisa das possibildades de resposta em livros, internet, calculadoras, celulares e software.

Apresentação dos grupos com os resultados encontrados.

DESENVOLVIMENTO/EXPLICAÇÃO: Valendo-se da Técnica de Exposição Oral, os seguintes tópicos deverão ser abordados:

Desenvolvimento:
Realizar as abordagens numérica, gráfica e por binômio de Newton (capítulos 4, 5 e 6).
Atividades em recursos digitais (capítulos 7, 8 e 9)
Atividades para atribuir significado ao 0^0 (capítulos 10, 11 e 12).

Conclusão:
A resposta para a pergunta: "0^0 existe?" (sim).
Quais as soluções adotadas para a expressão 0^0? Um ou indeterminado.

Bibliografia:
Apresentar a bibliografia e realizar comentários.

VERIFICAÇÃO: A verificação será realizada durante a aula (verificação parcial) e ao final o aluno deverá construir o significado da expressão 0^o.

SUMÁRIO: Será feita uma revisão do tema ao final da aula com a projeção em slides.

Referências:

LIMA, E. L.; Conceitos e Controvérsias. Qual o valor de 0^0. Revista do Professor de Matemática, Vol 1. 1982, p. 07-08.

LIMA, E. L.; Conceitos e Controvérsias. Novamente 0^0. Revista do Professor de Matemática, Vol 7. 1985, p. 17-20.

PRADO, P. M. L.; Conceitos e Controvérsias. Voltando ao 0^0. Revista do professor de Matemática, Vol 11. 1987, p. 17-18.

Recursos instrucionais: Projetor de multimídia e quadro.

4 Abordagem numérica

Este tipo de abordagem emprega os conceitos de limites, porém numericamente, o que permite a apresentação do assunto em diversos níveis de escolaridade.

A primeira coluna da tabela realiza a aproximação da expressão 0^y para o valor de 0^0 reduzindo os expoentes fixando a base em zero. Esta aproximação em direção ao zero indicaria que o valor de $0^0 = 0$. Esta coluna expressa a seguinte propriedade: zero elevado a qualquer número, maior que zero, é igual a zero. Com base nesta propriedade podemos inferir que o valor de 0^0 é 0. Em termos de limites podemos escrever: $\lim_{y \to 0^+} 0^y = 0$.

A segunda coluna da tabela realiza a aproximação da expressão x^0 com a redução da base, sempre mantendo o expoente igual a zero, mas diminuindo gradativamente a base teríamos que o valor de 0^0 é 1. Esta coluna expressa a seguinte propriedade: qualquer número, diferente de zero, elevado a zero é igual a um. Com base nesta propriedade podemos inferir que o valor de $0^0 = 1$. Em termos de limites podemos escrever: $\lim_{x \to 0} x^0 = 1$.

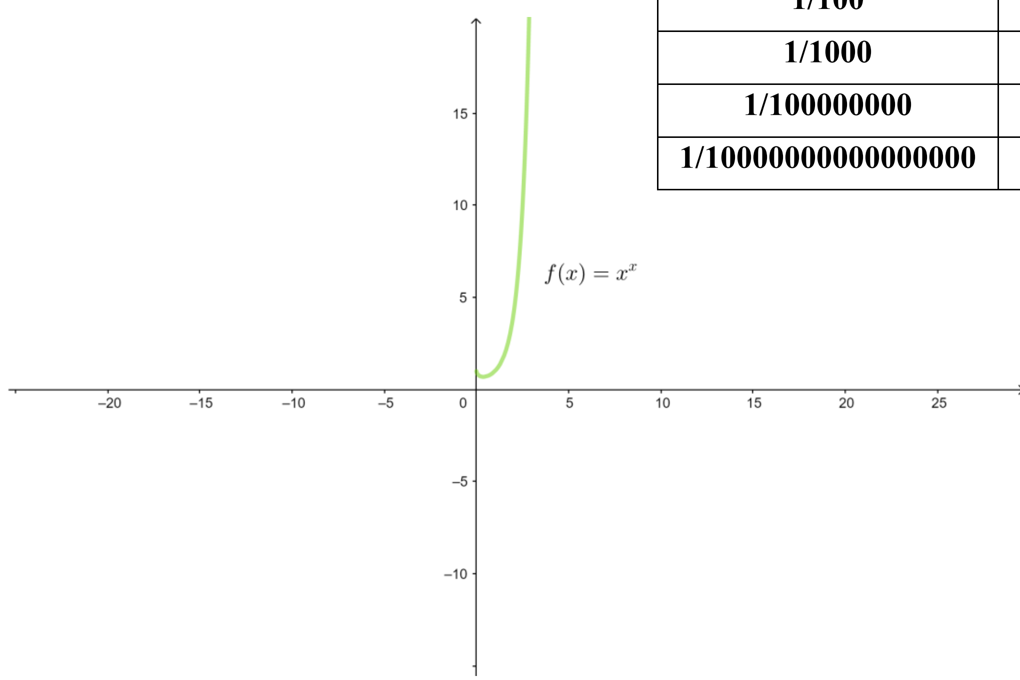
$x \to 0$ e $y = 0$	$x = 0$ e $y \to 0$
$\mathbf{0^{4} = 0}$	$\mathbf{6^{0} = 1}$
$\mathbf{0^{3} = 0}$	$\mathbf{5^{0} = 1}$
$\mathbf{0^{2} = 0}$	$\mathbf{4^{0} = 1}$
$\mathbf{0^{1} = 0}$	$\mathbf{3^{0} = 1}$
$\mathbf{0^{1/2} = 0}$	$\mathbf{(1/2)^{0} = 1}$
$\mathbf{0^{1/3} = 0}$	$\mathbf{(1/3)^{0} = 1}$
$\mathbf{0^{1/100} = 0}$	$\mathbf{(1/100)^{0} = 1}$
$\mathbf{0^{0} = ?\ (0)}$	$\mathbf{0^{0} = ?\ (1)}$

Conclusão: O resultado não se impõe numericamente, pois existem duas possibilidades.
Obs.: Operações limitadas aos números positivos e os cálculos com uso de calculadora.

5 Abordagem gráfica

O gráfico e tabela apresentados na figura abaixo permite visualizar o comportamento da função $f(x) = x^x$, no plano Real positivo. Conforme nos aproximamos no eixo x pela direita em direção ao zero, a curva é contínua e se aproxima para um. Não podemos concluir qual o valor de 0^0 observando somente o gráfico da função $f(x) = x^x$, pois na vizinhança do zero o gráfico é descontínuo pois não existe representação gráfica a esquerda da origem, o que constitui uma ambiguidade, logo 0^0 é dita como uma expressão indeterminada graficamente.

TABELA	
x	$f(x) = x^x$
1	**1**
1/5	**0,72478...**
1/10	**0,79432...**
1/100	**0,95499...**
1/1000	**0,99321...**
1/100000000	**0,9999999...**
1/10000000000000000	**= 1**



Conclusão: O resultado não se impõe graficamente, logo a expressão 0^0 é indeterminada quando abordada graficamente.
Obs.: O gráfico é continuo somente para valores positivos.
(Este gráfico foi elaborado no Geogebra).

6 Abordagem por binômio de Newton

O número binomial $\binom{n}{k}$, com n e k inteiros, representa, em análise combinatória o número de subconjuntos com k elementos num conjunto com n elementos. Logo $\binom{n}{0} = 1$, pois em qualquer conjunto existe como subconjunto o conjunto vazio. Particularmente, observa-se que o conjunto vazio é subconjunto do próprio conjunto vazio e consequentemente $\binom{0}{0} = 1$.

Observando a fórmula e o termo do binômio de Newton, temos:

$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 y^n$

Portanto, para $x = 1, y = -1\ e\ n = 0$, observa-se: $(1-1)^0 = 1 \rightarrow 0^0 = 1$

A primeira linha do triângulo de Pascoal, figura abaixo, pode ser utilizada para melhor apresentar a situação descrita acima.

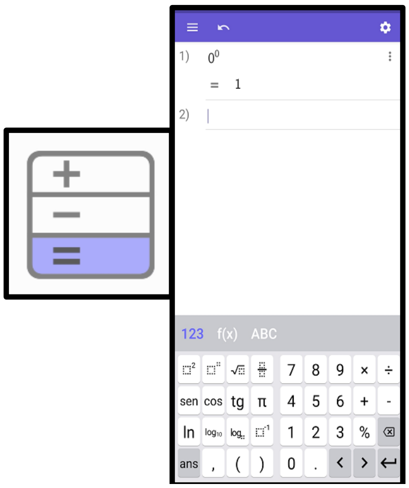
$$
\begin{array}{ccl}
1 & \longrightarrow & (x+y)^0 = 1 \\
1 \quad 1 & \longrightarrow & (x+y)^1 = 1x + 1y \\
1 \quad 2 \quad 1 & \longrightarrow & (x+y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 & \longrightarrow & (x+y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3 \\
\cdots & & \cdots
\end{array}
$$

Triângulo de Pascal e Binômio de Newton

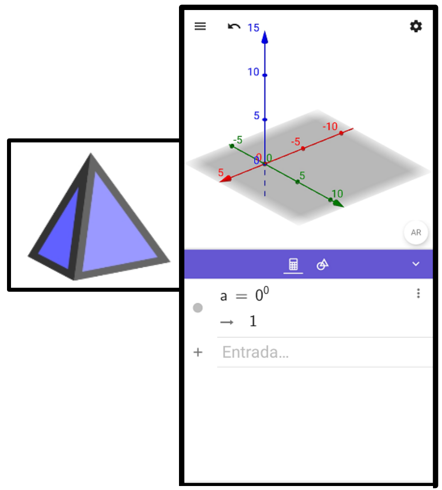
Conclusão: Nesta abordagem para o binômio de Newton, o resultado é que a expressão zero elevado a zero possui valor unitário, ou seja, $0^0 = 1$.

7 Abordagem no *software* Geogebra

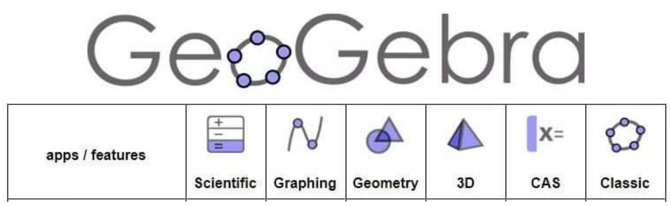
O Geogebra é um software de matemática dinâmica que aglutina conceitos de geometria e álgebra, possui distribuição gratuita e é amplamente difundido para uso em ambiente escolar. Este software possui diversas versões que permitem a execução de cálculos aritméticos. A figura abaixo exibe o resultado do cálculo do valor 0^0 obtido na calculadora científica do geogebra que pode ser instalada nos celulares modernos.



Calculadora científica do Geogebra



Calculadora 3D Geogebra



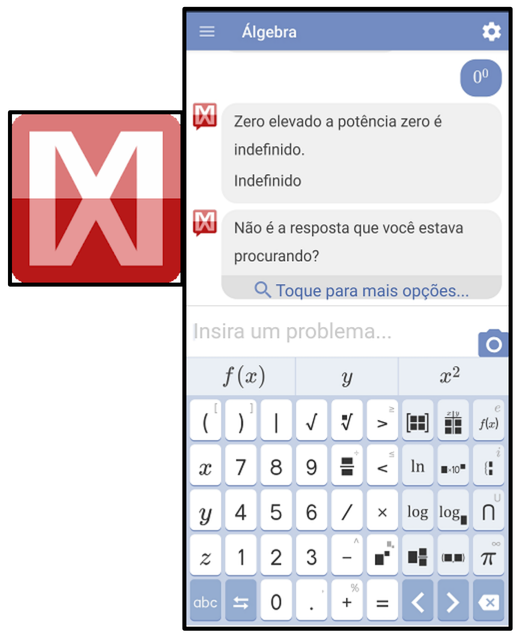
Aplicativos Geogebra

Conclusão: As calculadoras científica e 3D do geogebra adotam que o valor de $0^0 = 1$.
Obs.: Resultados semelhantes são obtidos nesta operação em aplicativos do Geogebra, tais como os *Classic, Graphing e Geometry*.

8 Abordagem em softwares tipo “calculadora de câmera”.

Os softwares Photomath e Mathway são do tipo “calculadora de câmera”. O Photomath foi desenvolvido pela empresa britânica MicroBlink. O Mathway foi desenvolvido pela empresa Mathway- LLC, subsidiária da empresa amarica Chegg. Este é um tipo de aplicativo, popular entre os alunos do ensino básico, utiliza a câmera do smartphone para solucionar problemas matemáticos. Apresenta operação simples, basta apontar o seu smartphone para uma equação e o aplicativo é capaz de resolver problemas matemáticos e ainda apresentar os passos para chegar à solução. As figuras abaixo exibem os resultados do cálculo da expressão 0^0 nas calculadoras científicas dos softwares Photomath e Mathway.

Calculadora científica photomath
Fonte: https://photomath.app/pt/

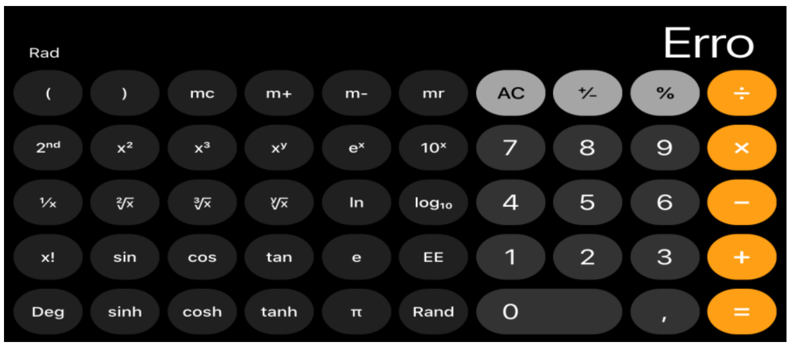


Calculadora científica Mathway
Fonte: https://www.mathway.com/

Conclusão: As calculadoras científicas dos softwares Photomath e Mathway adotam como indefinido o resultado para a expressão 0^0.

9 Abordagem em calculadoras de celulares

É muito comum os celulares possuírem calculadoras digitais que permitem a execução de diversas operações aritméticas. As figuras abaixo exibem as telas do cálculo dos valores de 0^0 com soluções distintas. O celular iPhone apresenta a solução como indefinida, o celular Asus Zenfone exibe o resultado unitário, e o celular da Motorola expõe uma solução dupla, indicando que o resultado pode ser um ou indefinido. Observe que os diversos resultados permitem a elaboração de propostas com outros conteúdos da matemática básica, tais como cálculos estatísticos básicos das possibilidades dos resultados para expressão zero elevado a zero.



Calculadora do celular iPhone

Calculadora do celular Motorola

Calculadora do celular Asus Zenfone

10 Questão 1: “as palavras do alfabeto”

As diferentes letras de um alfabeto se combinam para formar as suas possíveis palavras. Cada letra pode ocupar o princípio, o meio ou término de cada palavra. Vamos imaginar um alfabeto de três letras, por exemplo: {a, b, c}.

Quantas palavras com exatamente três letras podemos escrever com este alfabeto?

O nosso conjunto de palavras com três letras será: {aaa, aab, aac, aba, abb, abc, aca, acb, acc, baa, bab, bac, bba, bbb, bbc, bca, bcb, bcc, caa, cab, cac, cba, cbb, cbc, cca, ccb, ccc}, um total de 27 palavras, ou seja, 3^3.

Quantas palavras com exatamente duas letras podemos escrever com este alfabeto?

O nosso conjunto de palavras com duas letras será: {aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc}, um total de 9 palavras, ou seja, 3^2.

Quantas palavras com exatamente uma letra podemos escrever com este alfabeto?

O nosso conjunto de palavras com um letra será: {a, b, c}, um total de 3 palavras, ou seja, 3^1.

Quantas palavras, sem nenhuma letra, podemos escrever com este alfabeto?

O nosso conjunto de palavras sem nenhuma letra será um espaço vazio, um total de uma palavra, ou seja, 3^0.

Agora, caso nosso alfabeto não possuísse letras e tivéssemos que escrever palavras com uma letra ou mais, não seria possível, ou seja, $0^a = 0$, sendo $a > 0$ o número de letras das palavras.

E finalmente, com um alfabeto vazio é possível escrever uma única palavra, o próprio alfabeto seria a única palavra, ou seja, $0^0 = 1$.

Esta questão apresenta a dificuldade de apresentar ao aluno o espaço vazio como um elemento importante na escrita ou fala, então a título de exemplificação apresentaremos alguns cenários afetos a esta situação:

a) Escreva uma frase sem colocar espaço entre as palavras, observe a frase a seguir:

“Amatemáticapreparaoalunoparainterpretaromundoemquevivemos.”

A falta do espaço vazio entre as palavras dificulta a interpretação da mensagem. Então o espaço vazio é importante na transmissão de uma mensagem.

b) Existem palavras que possuem sentido diferente quando escritas juntas e separadas, por exemplo, “a gente” e “agente”. Observe as frases a seguir:

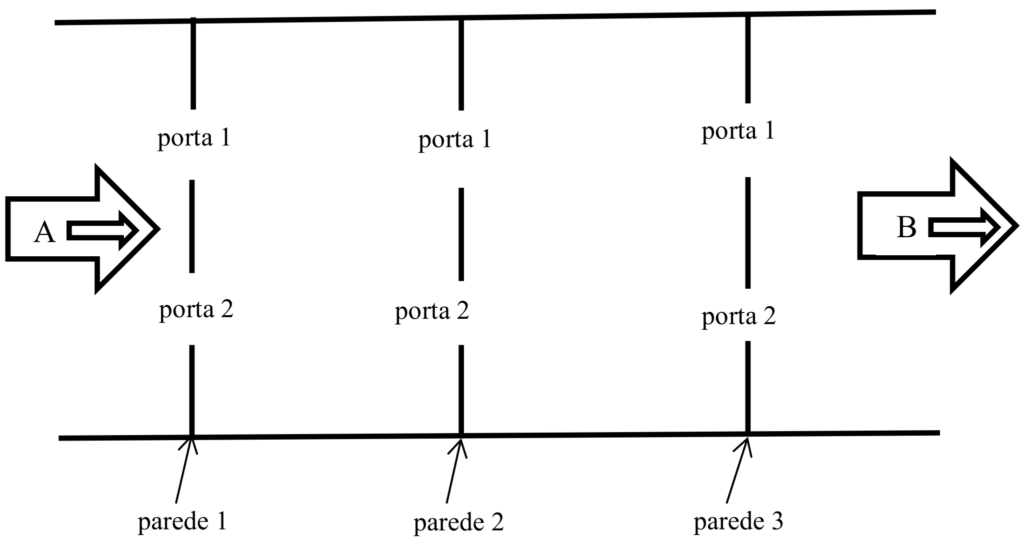
1) “Através da matemática **a gente** pode entender o comportamento periódico das marés.” O “a gente”, nesta frase, possui significado de “nós”.

2) “o **agente** Zero é um personagem da Marvel.” O “agente”, nesta frase, significa “aquele que age”.

c) O espaço vazio também está presente na fala. Sendo representado pelo silêncio que devemos fazer ao pronunciar uma frase. Este vazio (o silêncio) é de extrema importância para a transmissão da mensagem falada.

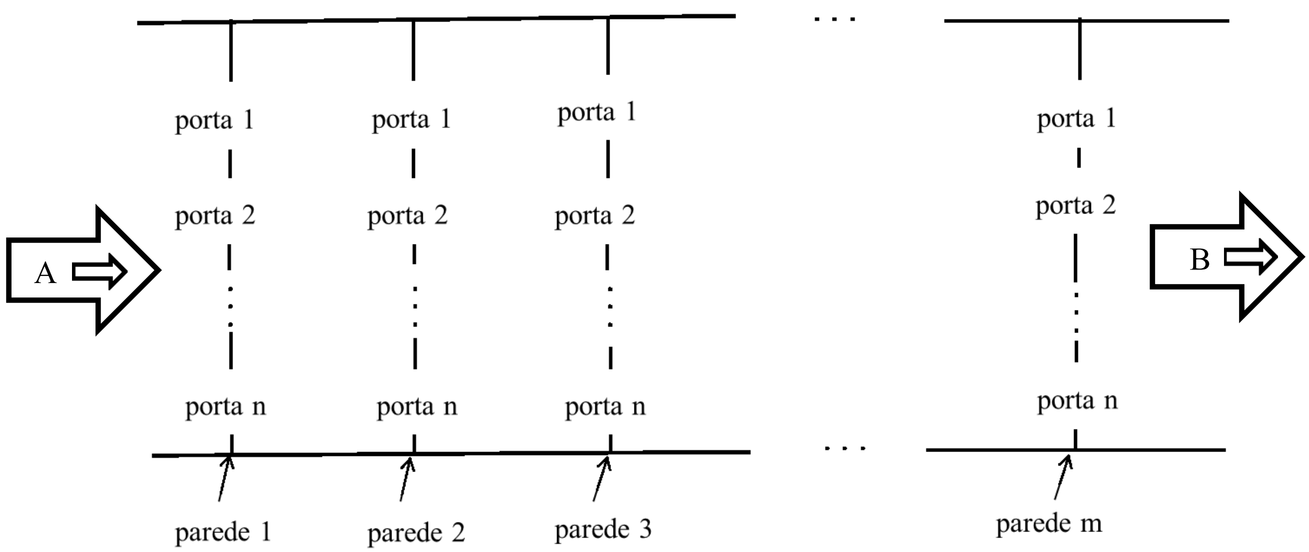
11 Questão 2: "Os caminhos em um labirinto"

A figura abaixo representa um labirinto que possui três paredes com duas portas em cada uma. Deseja-se percorrer esse labirinto, da esquerda para direita, em um único sentido conforme indicado pelas setas A e B.

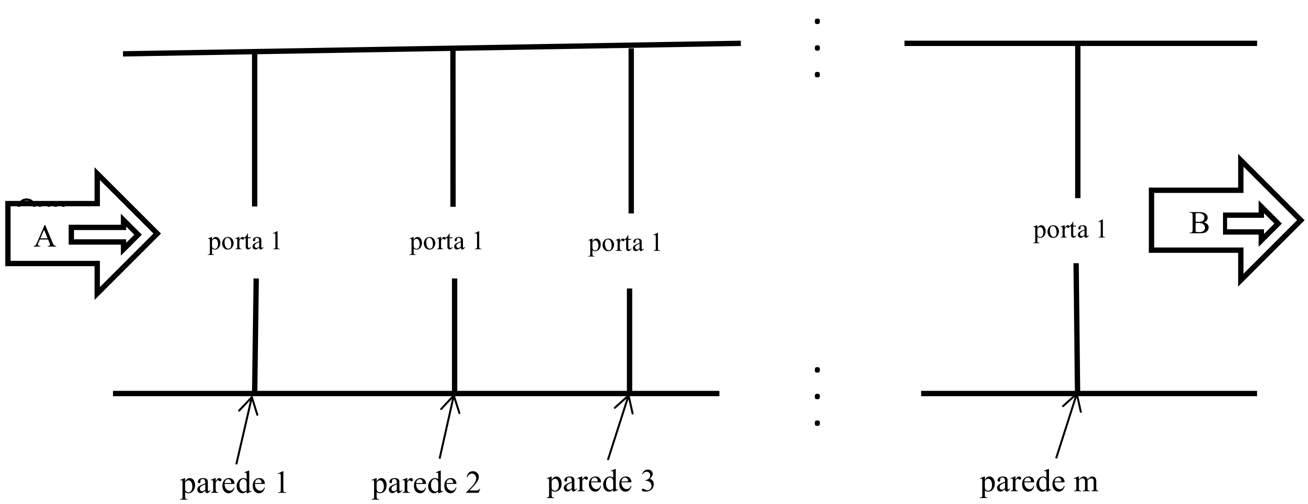


Quantos caminhos podemos percorrer para atravessar este labirinto? Representando as possibilidades pelos números de cada porta teremos a seguinte coleção de caminhos: {111, 112, 121, 122, 211, 212, 221, 222}, um total de 8 possibilidades de caminhos, ou seja, 2^3.

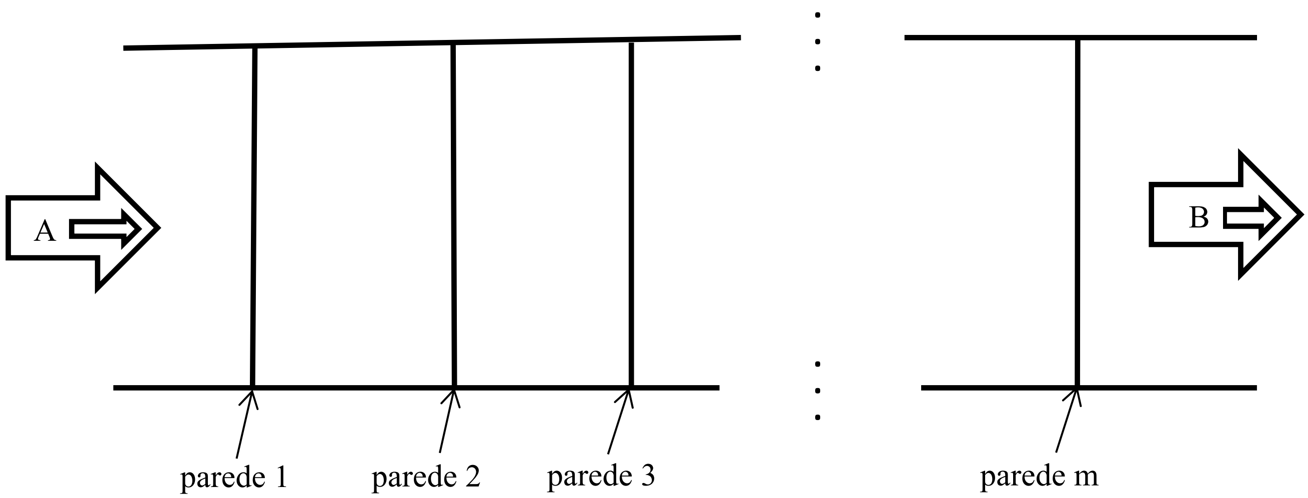
Vamos imaginar um labirinto que possua m paredes com n portas, conforme a figura abaixo. As coleções de caminho que teríamos para as n opções de portas por parede e aplicando o princípio multiplicativo, a quantidade total de caminhos seriam: n×n×n×n× ... ×n (m vezes), ou seja, n^m.



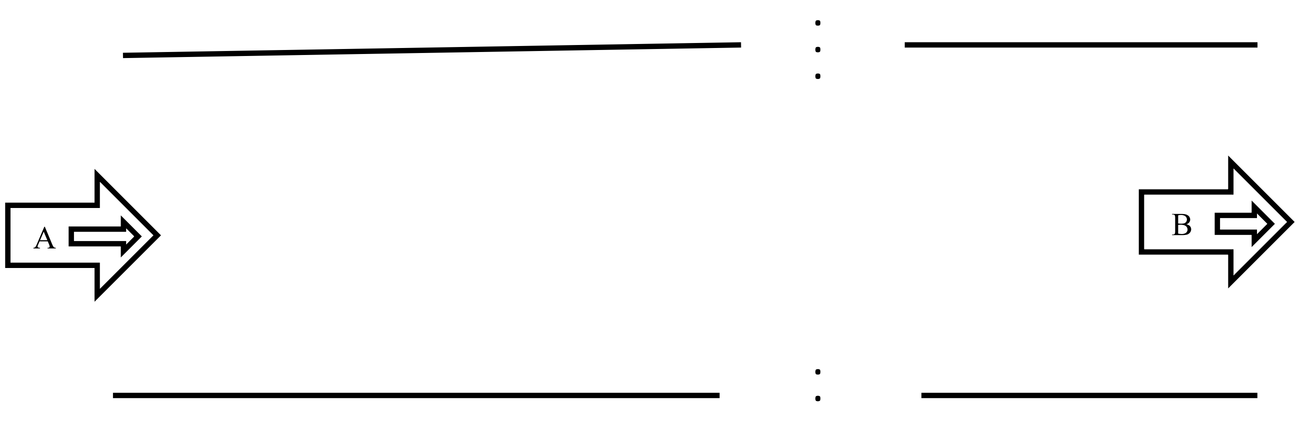
Vamos testar a nossa expressão. A próxima figura representa, mais uma vez, o nosso labirinto como uma porta em cada uma das m paredes com m > 0, deste modo, nós teríamos um único caminho, ou seja, $1^{m} = 1$ e nossa expressão continua válida.



Vamos testar, mais uma vez, a nossa expressão. A próxima figura representa, mais uma vez, o nosso labirinto como sem porta em todas as m paredes com m > 0, deste modo, nós não teríamos caminho, ou seja, $0^{m} = 0$ e nossa expressão contínua válida.

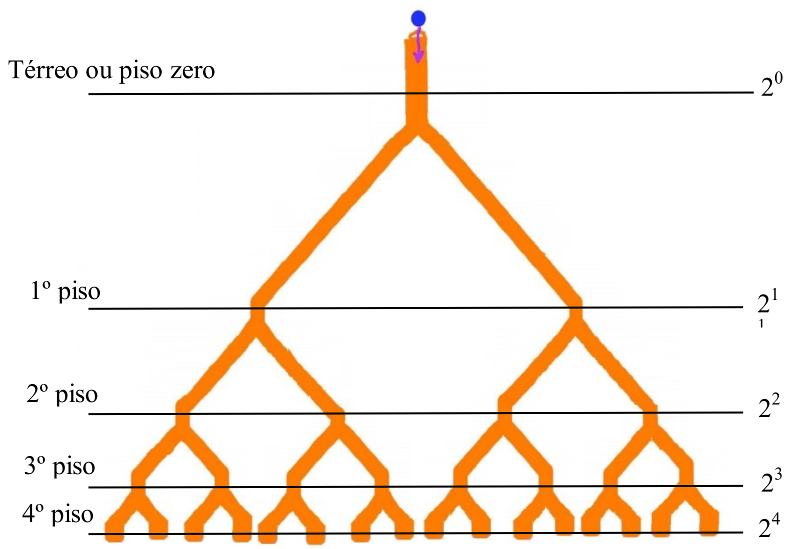


Por fim, caso nosso labirinto não tivesse porta e nem parede, teríamos o caminho indicado pelas setas na figura abaixo e aplicando a nossa expressãeso, teríamos $0^0 = 1$.

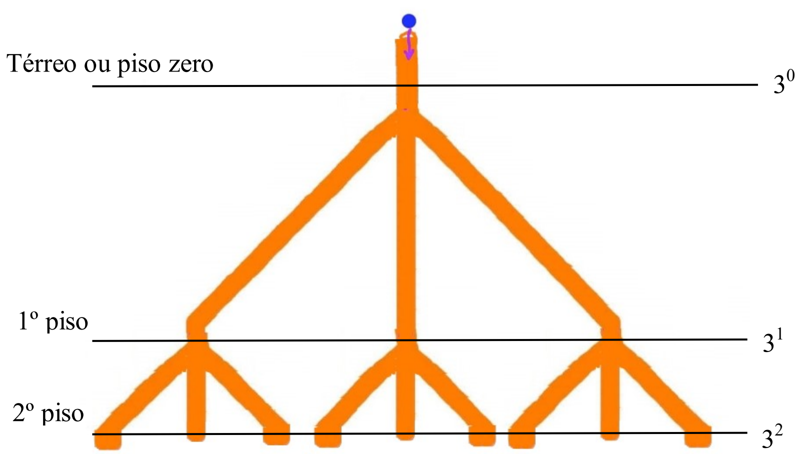


12 Questão 3 “A queda de uma bola”

A figura a seguir representa a queda da bola azul que avança aos pisos inferiores com ajuda de tubos que se dividem sucessivamente em ramos. O objetivo é calcular a quantidade de posições possíveis de serem alcançadas pela bola azul em cada piso p ($p = 0, 1, 2, \ldots$). Observe que quando a rede de tubo é uma árvore binária, cada ramo se divide em exatamente dois ramos. Podemos expressar a quantidade de posições possíveis de serem alcançadas pela bola azul com a expressão 2^{piso} (mesmo acrescentando outros pisos após o quarto piso).

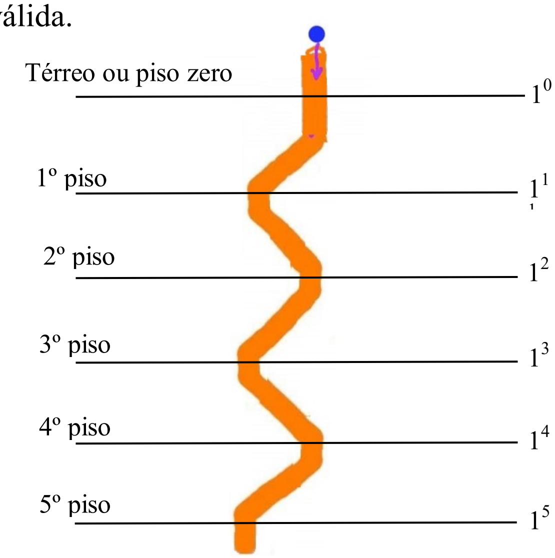


A próxima figura representa a queda da bola azul que avança aos pisos inferiores com ajuda de tubos que se dividem sucessivamente em ramos. O objetivo é calcular a quantidade de posições possíveis de serem alcançadas pela bola azul em cada piso p ($p = 0, 1, 2, \ldots$). Observe que quando a rede de tubo é uma árvore ternária, cada ramo se divide em exatamente três ramos. Podemos expressar a quantidade de posições possíveis de serem alcançadas pela bola azul com a expressão 3^{piso} (mesmo acrescentando outros pisos após o segundo piso).

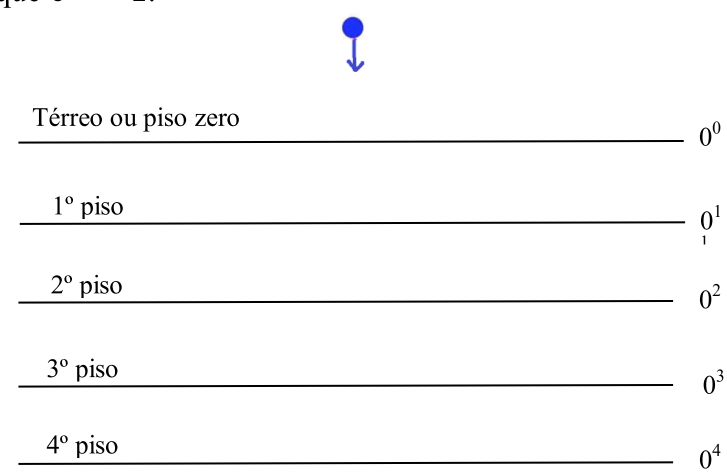


Podemos inferir, pelos exemplos anteriores, que o número (n) de posições alcançadas pela bola pode ser representado pela expressão $n = r^{piso}$, onde r é o número de ramos.

Vamos testar a nossa expressão. A próxima figura representa, mais uma vez, a queda da bola azul que avança aos andares inferiores com ajuda de tubos e, desta vez, possui somente um ramo. Podemos observar que a quantidade de posições possíveis alcançadas pela bola azul é representada pela expressão 1^{piso}, ou seja, a bola só atinge uma posição em cada piso e nossa expressão continua válida.



A próxima figura representa, mais uma vez, a queda da bola azul que tenta avançar aos andares inferiores sem os tubos com ramos. Observe que a bola não conseguirá atingir nenhuma posição nos demais pisos além do térreo. Portanto, para o valor do $piso \geq 1$, a bola azul não atingiria estes pisos, ou seja, $0^{piso} = 0$ e nossa expressão continua válida. Observe também que a bola atingirá somente o térreo ou piso zero, ou seja, uma posição no piso zero e aplicando a nossa expressão, teríamos que $0^0 = 1$.



13 Considerações finais

A controvérsia sobre a expressão zero elevado a zero é antiga e permanece nos dias atuais. Não existe consenso único e conclusivo para a questão.

Acreditamos que a apresentação desta controvérsia no ensino básico esteja consoante com uma educação moderna e é um bom exemplo para trabalhar a percepção do aluno no sentido de que a matemática não precisa possuir resposta definitiva para tudo.

Espera-se que as reflexões e abordagens apresentadas neste projeto educacional contribuam para os professores, fornecendo mais subsídios para explorarem com seus alunos a riqueza de detalhes existente na matemática.

14 Referências bibliográficas

LIMA, E. L. Conceitos e Controvérsias: Qual o valor de 0^0? **REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, v. 1, pp. 07-08, 1982. Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/1/2.htm>. Acesso em: 20 jul. 2020.

______. Conceitos e Controvérsias: Novamente 0^0. **REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, v. 7, pp. 17-20, 1985. Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/7/4.htm>. Acesso em: 20 jul. 2020.

PRADO, P. M. L. Conceitos e Controvérsias: Voltando ao 0^0. **REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, v. 11, p. 17-18, 1987. Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/11/4.htm>. Acesso em: 20 jul. 2020.